Mouvements Oscillatoires

Cours et exercices

Version 1.0

par

H. Bouderba

Dept. Sciences et Technologies
Université de Ghardaia

Table des matières

Avant propos

Le présent polycopié sur les Mouvements oscillatoires est destiné aux étudiants en deuxième année des licences en sciences et techniques (ST) concernés par le module des Vibrations et Ondes. Il regroupe l'ensemble des notes de cours avec des exercices résolus qui sont, pour la plupart, présents sur la plate-forme d'enseignement à distance de l'université de Ghardaïa.

Principalement, on aborde les oscillations des systèmes mécaniques mais sans oublier de mettre un accent sur le caractère plus général des phénomènes oscillatoires en traitant les oscillations dans certains systèmes électriques. On tache de faire apparaître la place importante de l'oscillateur harmonique dans les phénomènes vibratoire. Les problèmes sont traités dans le formalisme Newtonien en utilisant les forces et le principe de conservation de l'énergie totale dans les systèmes conservatifs. L'usage du formalisme Lagrangien est introduit en faisant remarquer la grande simplification qu'il apporte dans les systèmes compliqués qu'il soient conservatifs ou non-conservatifs.

Ce travail étant dans sa première version, il nécessitera certainement des révisions et des améliorations. A cette fin, tous les commentaires allant dans ce sens seront les bienvenus.

H. Bouderba

Chapitre 1

Généralités

Sommaire

1.1 Mouvement oscillatoire

Le mouvement oscillatoire est un type de mouvement particulier qu'on rencontre souvent dans la vie de tous les jours. C'est ***un mouvement de va-et-vient répétitif***. Des exemples typiques sont représentés sur la Figure (1.1). Une masse attachée à un ressort écartée de sa position d'équilibre puis relachée effectue un mouvement d'aller et retour qui se repète dans le temps. Un pendule simple oscille s'il est écarté de la vertical puis relaché. Une bille roulant sur une surface concave descend puis remonte de l'autre coté du bas de la surface répétitivement.

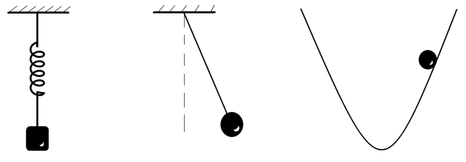


FIG. 1.1 – Exemples de mouvements oscillatoires.

Une analyse simple du système masse-ressort nous permet de mettre en evidence une cause très commune des mouvements oscillatoires. Une représentation schématique d'un tel mouvement est reproduite sur la Figure (1.2). A l'équilibre (Figure 1.2.a), le ressort n'est pas déformé et n'exerce donc aucune force sur la masse. Lorsque la masse est écartée de l'équilibre vers le sens positif (Figure 1.2.b) elle subit une force de tension $\boldsymbol{f}$ par le ressort dirigée vers le sens négatif. Lorsque la masse est écartée vers le sens négatif (Figure 1.2.c), la force de tension est, cette fois, dirigée vers le sens positif.

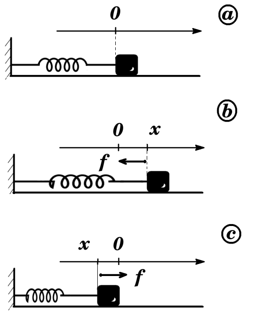


FIG. 1.2 – Mouvement oscillatoire sous l'effet d'une force de rappel.

Le point important à remarquer est que, dans les deux cas, la force est dirigée vers la position d'équilibre. Des que le corps est écarté de la position d'équilibre cette force apparait pour tenter de la ramener vers l'équilibre. Cette force est dite ***force de rappel***. Elle tend a rappeler le corps vers la position d'équilibre.

Ainsi, si on relache le corps aprés l'avoir écarté de la position d'équilibre, il se met en mouvement accéléré pour revenir à l'équilibre sous l'effet de la force de rappel. Lorsqu'il atteint la positon d'équilibre, la force s'annule ; mais, puiqu'il a aquérit une certaine vitesse avant d'atteindre la position d'équilibre, il continue son mouvement sous l'effet de l'inertie et passe de l'autre coté de la position d'équilibre. La force de rappel apparait encore une fois pour le faire revenir à l'équilibre. Sous l'effet de cette force, le corps commence à ralentir jusqu'au moment ou sa vitesse s'annule et il commence a accelerer pour aller à la position d'équilibre. Une fois cette position atteinte, il passe de l'autre coté sous l'effet de l'inertie, et fait apparaite la force de rappel dans l'autre sens. On constate alors qu'on obtient un mouvement de va-et-vient de part et d'autre de la position d'équilibre.

Notons qu'on ne s'interesse pas à l'expression exacte de la force de rappel. Le seul point important et le fait que c'est une ***force de rappel***, c'est-à-dire, qu'elle s'annule à l'équilibre mais tend toujours à ramener le corps vers cette position d'équilibre partout ailleurs. Ce critère est suffisant pour obtenir un mouvement oscillatoire. Une analyse détaillée permet dans beaucoup de cas de mettre en évidence que la cause du mouvement est l'existence d'une position d'équilibre et d'une force de rappel qui ramène vers cette position. Cependant, on note encore une fois, ce critère est suffisant mais pas nécessaire. On peut parfaitement avoir un mouvement oscillatoire sans satisfaire la condition précédente.

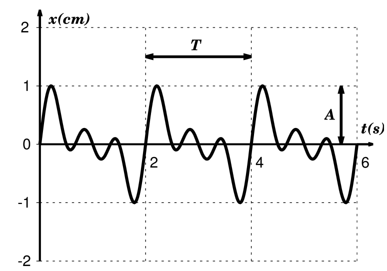


FIG. 1.3 – Mouvement oscillatoire périodique avec une période $T = 2$ s, une fréquence $f = {}^{1}/_{T} = 0.5$ c, une pulsation $\omega = 2\pi f = \pi$ $^{rad}/_{s}$ et une amplitude $A = 1$ cm.

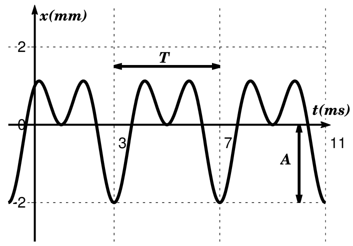


FIG. 1.4 – Mouvement oscillatoire périodique avec une période T = 4 ms = 4×10^{-3} s, une fréquence $f = {}^{1}/_{T} = 250$ Hz, une pulsation $\omega = 2\pi f = 500\pi$ $^{rad}/_{s}$ et une amplitude $A = 2$ mm.

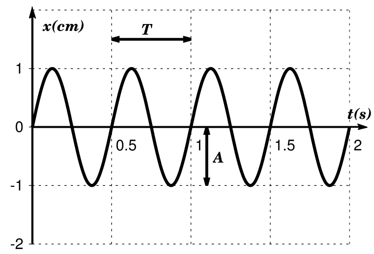


FIG. 1.5 – Mouvement oscillatoire périodique avec une période $T = 0.5$ s, une fréquence $f = {}^{1}/_{T} = 2$ Hz, une pulsation $\omega = 2\pi f = 4\pi$ $^{rad}/_{s}$ et une amplitude $A = 1$ cm.

1.2 Mouvement périodique et ses caractéristiques

Un cas particulier important des mouvements oscillatoires est le mouvement périodique. C'est un mouvement qui ***se reproduit d'une manière identique***. Si la position d'un corps qui effectue un mouvement oscillatoire est donnée par une coordonnée x ; cette coordonnée est une fonction du temps $x(t)$. Ce mouvement peut être périodique si la fonction $x(t)$ est périodique.

La périodicité dans le temps[1] est caractérisée par le temps nécessaire pour effectuer une oscillation complète autour de la position d'équilibre. Ce temps est la ***période*** du mouvement T. La fonction $x(t)$ doit alors satisfaire $x(t) = x(t + T)$ à tout instant t.

On définit aussi la ***fréquence*** du mouvement f qui est le nombre d'oscillation effectuée en une seconde. Si la période T est le temps nécessaire pour faire une oscillation on déduit que le nombre d'oscillations effectuées en une seconde est $f = {}^{1}/_{T}$ et elle est mesurée en $Hertz = {}^{1}/_{s}$.

Une autre quantité peut aussi être définit, c'est la ***pulsation*** du mouvement ω (parfois appelée fréquence angulaire) et elle est donnée par $\omega = 2\pi f$ et elle est mesurée en rad an par seconde. Elle ressemble à une vitesse angulaire qui représente l'angle parcouru par unité de temps. Si pour chaque oscillation on fait correspondre une rotation complète avec un angle de 2π ; on doit faire correspondre un angl de $2\pi f$ pour chaque unité de temps qui est la pulsation du mouvement.

Enfin, une autre quantité importante est la distance maximale de l'écart du corps par rapport à la position d'équilibre ; elle est dénotée : ***amplitude*** du mouvement A. Des exemples de mouvements périodiques sont illustrés sur les Figures (1.3, 1.4 et 1.5).

1.3 Mouvement sinusoïdal et Notation complexe

considérant un point matériel $\boldsymbol{P}$ en mouvement circulaire uniforme (i.e, sa vitesse angulaire est constante) comme indiqué sur la Figure (1.6). La position du point $\boldsymbol{P}$ est parfaitement déterminée si on connais l'angle θ. Puisque la vitesse angulaire ω est constante, l'angle θ doit être une fonction linéaire du temps et, à un instant t, la position du point $\boldsymbol{P}$ sur le cercle est simplement donnée par :

$$\theta(t) = \omega t + \phi \tag{1.1}$$

l'angle ϕ est une constante qui correspond à l'angle θ à l'instant initial. Alternativement, sur la figure précédente (1.6), on constate qu'on peut aussi déterminer la position du point $\boldsymbol{P}$ en donnant les deux coordonnée x et y qui sont reliées à l'angle θ et le rayon du cercle r par :

$$x = r\cos\theta \tag{1.2}$$

$$y = r\sin\theta \tag{1.3}$$

mais l'évolution de l'angle θ en fonction du temps est donnée par l'équation (1.1) ; en remplaçant cette expression de θ dans les équations précédentes on obtient :

$$x = r\cos(\omega t + \phi) \tag{1.4}$$

$$y = r\sin(\omega t + \phi) \tag{1.5}$$

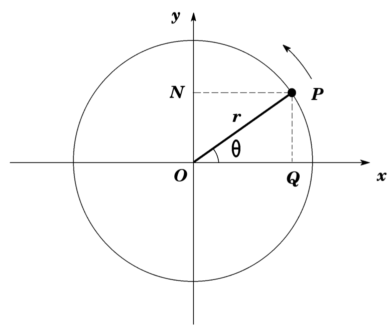


FIG. 1.6 – Le point $\boldsymbol{P}$ effectue un mouvement circulaire uniforme alors que le point $\boldsymbol{N}$ qui est sa projection sur l'axe Oy effectue un mouvement sinusoïdal. La projection sur l'axe Ox, correspondant au point $\boldsymbol{Q}$, effectue aussi un mouvement sinusoïdal.

la coordonnée y est la projection du point $\boldsymbol{P}$ sur l'axe Oy qui correspond au point $\boldsymbol{N}$. Alors que le point $\boldsymbol{P}$ effectue un mouvement circulaire uniforme, le point $\boldsymbol{N}$ effectue un mouvement de va-et-vient sur l'axe Oy en suivant l'équation du mouvement donnée par l'expression (1.5). C'est un mouvement oscillatoire avec une pulsation ω et une amplitude r. On dit que le point $\boldsymbol{N}$ a un mouvement ***sinusoïdal***. Le graphique représenté sur

[1] On peut aussi avoir une périodicité dans l'espace qu'on trouve souvent dans les phénomènes de propagation.

la Figure (1.5) est un example d'un tel mouvement pour lequel $x(t) = sin(4\pi t)$ en centimètre. L'amplitude est $A = 1\,\text{cm}$, la pulsation $\omega = 4\pi$ rad/s et la phase initiale est nulle.

Le point $\boldsymbol{Q}$ qui est la projection sur l'axe Ox a lui aussi un mouvement ***sinusoïdal*** bien qu'il soit exprimé par la fonction cosinus (equation (1.4)). Cela est ainsi car il est toujours possible de passer de la fonction cosinus à la fonction sinus et vice-versa si on sait que :

$$cos\,\alpha = sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) \text{ et } sin\,\alpha = cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) \tag{1.6}$$

Dans l'exemple précédent on peut écrire :

$$x(t) = sin(4\pi t) = cos\left(4\pi t - \frac{\pi}{2}\right) \tag{1.7}$$

Une manière très interessante pour exprimer les grandeurs sinusoïdales peut être déduite de la Figure (1.6). On peut considérer le plan Oxy comme un plan ***complexe*** dont les axes sont Ox et Oy. Dans un tel plan, chaque point de coordonées (x, y) correspond à un nombre complexe $z = x + jy$ (j étant le nombre complexe satisfaisant $j^2 = -1$). Au point $\boldsymbol{P}$ correspond alors un nombre complexe $z = x + jy$; mais x et y sont donnés par les expressions (1.2) et (1.3), donc :

$$z = r(\cos\,\theta + j\sin\,\theta) \tag{1.8}$$

dans cette relation en reconnais la formule d'Euler $\cos\,\theta + j\sin\,\theta = e^{j\theta}$. On peut alors écrire :

$$z = r(\cos\,\theta + j\sin\,\theta) = re^{j\theta} \tag{1.9}$$

et de cette relation on peut même déduire que :

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \qquad \text{et} \qquad \cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} \tag{1.10}$$

On voit que les fonctions sinus et cosinus peuvent parfaitement être repdoduites à l'aide de la fonction exponentielle et vice-versa. Cela est trés interessant car la fonction exponetielle est beaucoup plus simple à manipuler dans les calculs.

Une illustration pratique, ou l'on peut exploiter la représentation complexe, est la superposition de deux grandeurs sinusoïdales. Supposant qu'on souhaite obtenir la fonction réelle x_3 qui est la somme de deux fonctions réelles $x_1 = a\cos(\omega t + \alpha)$ et $x_2 = b\cos(\omega t + \beta)$; on a :

$$x_3 = x_1 + x_2 = a\cos(\omega t + \alpha) + b\cos(\omega t + \beta) \tag{1.11}$$

on propose un problème auxilliaire qui est de trouver la fonction y_3 qui est la somme de deux fonctions $y_1(t) = a\sin(\omega t + \alpha)$ et $y_2 = b\sin(\omega t + \beta)$; c'est-à-dire :

$$y_3 = y_1 + y_2 = a\sin(\omega t + \alpha) + b\sin(\omega t + \beta) \tag{1.12}$$

remarquant que les fonctions $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont identiques aux fonctions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sauf que le cosinus est devenu un sinus. On peut multiplier les deux membres de l'équation (1.12) par le nombre imaginaire j et additionner le resultat à l'équation (1.11) pour aboutir à :

$$\begin{aligned}\underbrace{x_3 + jy_3}_{z_3} &= \underbrace{(x_1 + jy_1)}_{z_1} + \underbrace{(x_2 + jy_2)}_{z_2} = \\ &a\underbrace{(\sin(\omega t + \alpha) + j\cos(\omega t + \alpha))}_{e^{j(\omega t+\alpha)}} \\ &+b\underbrace{(\sin(\omega t + \beta) + j\cos(\omega t + \beta))}_{e^{j(\omega t+\beta)}}\end{aligned} \tag{1.13}$$

On peut réecrire se résultat :

$$z_3 = z_1 + z_2 = ae^{j(\omega t+\alpha)} + be^{j(\omega t+\beta)} \tag{1.14}$$

$$= \underbrace{\left(ae^{j\alpha} + be^{j\beta}\right)}_{A} e^{j\omega t} = A\,e^{j\omega t} \tag{1.15}$$

le nombre $A = ae^{j\alpha} + be^{j\beta}$ est un nombre complexe constant qui a une norme $|A| = \sqrt{AA^*} = \sqrt{(ae^{j\alpha} + be^{j\beta})(ae^{-j\alpha} + be^{-j\beta})} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha - \beta)}$ et une phase Φ qui doit satisfaire $\tan\Phi = \frac{Im(A)}{Re(A)} = \frac{a\sin\alpha + b\sin\beta}{a\cos\alpha + b\cos\beta}$. On peut donc écrire $A = |A|e^{j\Phi}$ et le résultat final pour z_3 devient :

$$z_3 = |A|e^{j(\omega t+\Phi)} \tag{1.16}$$

il ne reste plus que de trouver la partie réelle de z_3 qui est la grandeur recherchée x_3 :

$$x_3 = Re(z_3) = |A|\cos(\omega t + \Phi) \tag{1.17}$$

En résumé, il faut attribuer une représentation complexe aux grandeurs réelles pour faire les calculs qui deviennent plus simples avec les exponentielles. Une fois le calcul terminé, on revient vers les grandeurs réelles.

Un autre exemple de l'usage de la notation complexe est dans le traitement des circuits à courants alternatifs. Des exemples de circuits simples sont illustrés sur la figure (1.7) (on considère que les composants sont idéals). Dans le premier circuit (figure (1.7.a)) la tension est donnée ($u = u^{(0)}\cos\omega t$) et on souhaite trouver le courant i qui passe dans la bobine. On attribue une notation complexe à la tension (les grandeurs complexe sont notées en majuscules et les minuscules sont pour les réelles) :

$$u = u^{(0)}\cos\omega t \quad \longleftrightarrow \quad U = U^{(0)}e^{j\omega t} \tag{1.18}$$

U et $U^{(0)}$ sont complexes, et u est la partie réelle de U ($U = Re(u)$). Si on veut trouver cette partie réelle, on peut exprimer le nombre complexe constant $U^{(0)}$ comme $U^{(0)} = Ae^{j\phi}$, A est le module et ϕ est son argument. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}U = U^{(0)}e^{j\omega t} = Ae^{j\phi}e^{j\omega t} = Ae^{j(\omega t+\phi)} = \\ \underbrace{A\cos(\omega t + \phi)}_{\text{la partie réelle}} + j\,A\sin(\omega t + \phi)\end{aligned} \tag{1.19}$$

par identification on déduit :

$$u^{(0)} = A \quad \text{et} \quad \phi = 0 \Rightarrow u^{(0)} = U^{(0)} \tag{1.20}$$

l'application de la loi des mailles au circuit nous donne :

$$\begin{aligned}U - L\frac{dI}{dt} = 0 \;\Rightarrow\; dI = \frac{1}{L}U\,dt \;\Rightarrow\; I = \int \frac{1}{L}U\,dt \\ \Rightarrow\; I = \int \frac{1}{L}U^{(0)}e^{j\omega t}\,dt = \frac{1}{jL\omega}U^{(0)}e^{j\omega t} = \frac{1}{jL\omega}U = \frac{U}{Z}\end{aligned} \tag{1.21}$$

$Z = jL\omega$ est l'impédance complexe du circuit ; elle est l'analogue de la résitance ohmique parcourue par un courant i sous une tension u ($u = Ri$). Finalement on peut

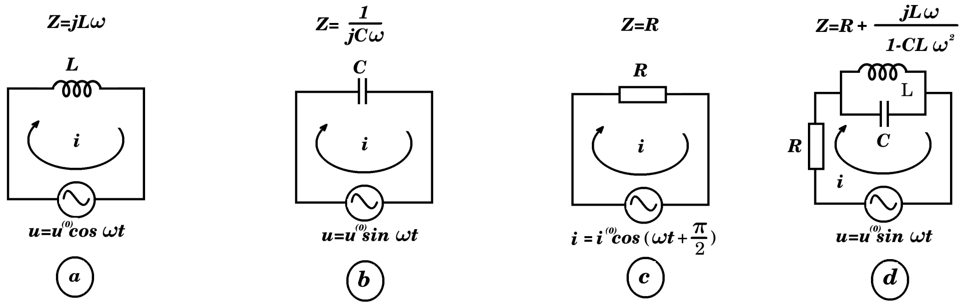


FIG. 1.7 – Exemples de réseaux électriques à courant alternatif sinusoïdal. Leur traitement est grandement simplifié en utilisant la notation complexe et la notion d'impédance Z qui est une grandeur complexe.

trouver la partie réelle de I :

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{jL\omega}\,u^{(0)}e^{j\omega t} = \frac{1}{jL\omega}\left(\cos(\omega t)\ +\ j\ \sin(\omega t)\right)\\
I &= \underbrace{\frac{u^{(0)}}{L\omega}\ \sin(\omega t)}_{\text{partie réelle}} + j\,\underbrace{(-\frac{u^{(0)}}{L\omega}\ \cos(\omega t))}_{\text{partie imaginaire}}\\
i = Re(I) &= \frac{u^{(0)}}{L\omega}\ \sin(\omega t) = \frac{u^{(0)}}{L\omega}\ \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \\
&\underbrace{\frac{u^{(0)}}{L\omega}}_{i^{(0)}}\ \cos(\omega t + \underbrace{\frac{3\pi}{2}}_{\Phi})
\end{aligned} \tag{1.22}$$

le courant est donc de la forme $i = i^{(0)}cos(\omega t + \Phi)$.

Dans le second circuit (figure (1.7.b)) la tension est donnée ($u = u^{(0)}\sin\omega t$) et on souhaite trouver le courant i. On attribue une notation complexe à la tension :

$$\begin{aligned}
u &= u^{(0)}\sin\omega t = u^{(0)}\cos(\omega t + \frac{3\pi}{2})\\
\Rightarrow\ U &= \underbrace{u^{(0)}e^{j\frac{3\pi}{2}}}_{U^{(0)}}\,e^{j\omega t} = U^{(0)}e^{j\omega t}
\end{aligned} \tag{1.23}$$

$U^{(0)}$ est un nombre complexe qui a la forme : $U^{(0)} = Ae^{j\phi} = A(\cos\phi + j\sin\phi)$ l'application de la loi des mailles nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
U - \frac{Q}{C} = U - \frac{1}{C}\int I\,dt &\Rightarrow I = C\frac{dU}{dt}\\
\Rightarrow I = C\frac{d}{dt}\left(U^{(0)}e^{j\omega t}\right) &= (jC\omega)U^{(0)}e^{j\omega t}\\
\Rightarrow I = (jC\omega)U &= \frac{U}{\left(\frac{1}{jC\omega}\right)} = \frac{U}{Z}
\end{aligned} \tag{1.24}$$

l'impédance complexe du circuit est $Z = \dfrac{1}{jC\omega}$. On peut aussi trouver la partie réelle du courant en sachant que (voir équation (1.23)) $U^{(0)} = u^{(0)}e^{j\frac{3\pi}{2}}$, donc :

$$\begin{aligned}
I = \frac{U}{Z} &= \frac{u^{(0)}e^{j\frac{3\pi}{2}}}{\frac{1}{jC\omega}}\ e^{j\omega t} = jC\omega\,u^{(0)}\ e^{j(\omega t + \frac{3\pi}{2})}\\
&\Rightarrow I = \underbrace{-C\omega\,u^{(0)}\ \sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right)}_{\text{partie réelle}} +\\
&\qquad \underbrace{j\left(C\omega\,u^{(0)}\ \cos\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right)\right)}_{\text{partie imaginaire}}\\
&\Rightarrow i = Re(I) = -C\omega\,u^{(0)}\ \sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right)\\
&\qquad = C\omega\,u^{(0)}\ \cos\left(\omega t + \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\\
&\Rightarrow i = \underbrace{C\omega\,u^{(0)}}_{i^{(0)}}\ \cos\omega t = i^{(0)}\cos\omega t
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Dans le troisième circuit (figure (1.7.c)) on donne l'intensité du courant dans le circuit $i = i^{(0)}\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$, et on veut calculer la tension de la résitance. On attribue une notation complexe au courant :

$$\begin{aligned}
i &= i^{(0)}\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})\\
i \longleftrightarrow\quad I &= \underbrace{i^{(0)}e^{j\frac{\pi}{2}}}_{I^{(0)}}\,e^{j\omega t} = I^{(0)}e^{j\omega t}
\end{aligned} \tag{1.26}$$

la loi des mailles permet d'écrire :

$$U - RI = 0 \Rightarrow U = \underbrace{R}_{Z}\ I = \underbrace{RI^{(0)}}_{U^{(0)}}\,e^{j\omega t} = U^{(0)}e^{j\omega t} \tag{1.27}$$

dans ce cas l'impédance Z est réelle et égale tout simplement la résitance R. On peut aussi trouver la partie réelle de la tension :

$$\begin{aligned}
U = U^{(0)}e^{j\omega t} &= R\ \underbrace{I^{(0)}}_{i^{(0)}e^{j\frac{\pi}{2}}}\ e^{j\omega t} = Ri^{(0)}e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}\\
\Rightarrow u &= Re(U) = Ri^{(0)}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Dans le quatrième circuit (figure (1.7.d)) le générateur produit une tension $u = u^{(0)}\sin\omega t$ on souhaite trouver l'impédance équivalente du circuit Z et l'intensité i. Pour cela, on se sert des impédances complexes des éléments simple trouvées dans les circuits précédents, $Z_R = R$,

$Z_L = jL\omega$ et $Z_C = \frac{1}{jC\omega}$.

$$Z = Z_R + (Z_L \parallel Z_C) = R + \frac{1}{\frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{\frac{1}{jC\omega}}} = R + \frac{jL\omega}{1 - CL\omega^2} \tag{1.29}$$

la représentation complexe de la tension :

$$u = u^{(0)} \sin \omega t = u^{(0)} \cos(\omega t + \frac{3\pi}{2})$$
$$u \longleftrightarrow \quad U = u^{(0)} e^{j(\omega t + \frac{3\pi}{2})} \tag{1.30}$$

le courant complexe I doit satisfaire :

$$I = \frac{U}{Z} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{u^{(0)} e^{j(\omega t + \frac{3\pi}{2})}}{R + \frac{jL\omega}{1 - CL\omega^2}} \tag{1.31}$$

l'impédance Z peut être écrite sous forme exponetielle $Z = |Z| e^{j\Phi}$ avec :

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{L\omega}{1 - CL\omega^2}\right)^2} \tag{1.32}$$

$$\Phi = \arctan\left(\frac{L\omega}{R(1 - CL\omega^2)}\right) \tag{1.33}$$

donc :

$$I = \frac{u^{(0)} e^{j(\omega t + \frac{3\pi}{2})}}{|Z| e^{j\Phi}} = \frac{u^{(0)}}{|Z|} e^{j(\omega t + \frac{3\pi}{2} + \Phi)} \tag{1.34}$$

et finalement on aboutit à l'intesité i :

$$i = Re(I) = \frac{u^{(0)}}{|Z|} \cos\left(\omega t + \frac{3\pi}{2} + \Phi\right) \tag{1.35}$$

1.4 Séries de Fourier

Le mouvement sinusoïdal a deux particularités très importantes. La première est qu'on retrouve ce mouvement très fréquemment dans la pratique (en reviendra sur ce point par la suite). La deuxième particularité est que ***tout mouvement périodique est en réalité une combinaison linéaire d'oscillations sinusoïdales***. En effet, supposant qu'on a une fonction periodique $f(t)$ avec une période T et une pulsation ω. Cette fonction est le résultat d'une superposition de fonctions sinusoïdales dont les pulsations sont ω, 2ω, 3ω, $\ldots$, $n\omega$, $\ldots$ et ainsi de suite jusqu'à l'infini. La contribution de chacune de ses oscillations sinusoïdales à la somme totale est donnée par l'amplitude de chaque oscillation. Plus précisément on écrit :

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n\, cos(n\omega t) + B_n\, sin(n\omega t)\right) \tag{1.36}$$

la constante A_n est l'amplitude de l'oscillation $cos(n\omega t)$ alors que la constante B_n est l'amplitude de l'oscillation $sin(n\omega t)$. Ces coéfficients et la constante A_0 sont appelés coéfficients de Fourier. Ils sont donnés par les expressions :

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt \tag{1.37}$$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\, \cos(n\omega t)\, dt \tag{1.38}$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\, \sin(n\omega t)\, dt \tag{1.39}$$

on constate que A_0 est la valeur de moyenne de la fonction $f(t)$.

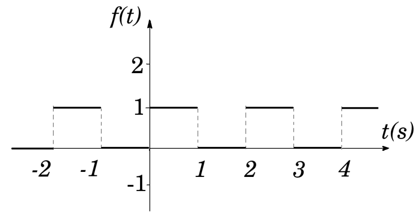


FIG. 1.8 – Exemple d'une fonction périodique (fonction à créneaux) qu'on peut décomposer en série de Fourier.

Pour l'exemple, considérant la fonction $f(t)$ dont le graphe est reproduit sur la Figure (1.8). C'est une fonction périodique à créneaux dont la forme analytique est donnée par :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [0, 1] \\ 0 & \text{si} \quad t \in]1, 2[\end{cases} \tag{1.40}$$

on peut déduire la période du graphe $T = 2$ s et $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$ rad/ s, les coéfficients de Fourier de cette fonction sont alors donnés par :

$$A_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt = \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)\, dt \tag{1.41}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dt = \frac{1}{2}[t]_0^1 = \frac{1}{2} \tag{1.42}$$

$$A_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\, \cos(n\omega t)\, dt \tag{1.43}$$

$$= \int_0^1 f(t)\, \cos(n\omega t)\, dt \tag{1.44}$$

$$= \frac{1}{n\omega}[\sin n\omega t]_0^1 = \frac{\sin n\omega}{n\omega} = \frac{\sin n\pi}{n\pi} = 0$$

$$B_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\, \sin(n\omega t)\, dt \tag{1.45}$$

$$= \int_0^1 f(t)\, \sin(n\omega t)\, dt \tag{1.46}$$

$$= -\frac{1}{n\omega}[\cos n\omega t]_0^1 = \frac{1 - \cos n\omega}{n\omega} \tag{1.47}$$

$$= \frac{1 - \cos n\pi}{n\pi} = \begin{cases} \frac{2}{n\pi} & \text{si } n \text{ impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases} \tag{1.48}$$

$$= \frac{2}{\pi(2k+1)} \qquad k = 0, 1, 2 \ldots$$

donc le développement en série de Fourier de la fonction $f(t)$ s'écrit :

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k+1)}\, sin(2k+1)\pi t \tag{1.49}$$

Remarquant que la décomposition en série de Fourier d'une fonction paire ne doit pas contenir la fonction sinus qui est impaire, i.e, $B_n = 0$ pour une fonction paire. De même, une fonction impaire ne doit pas contenir la fonction cosinus qui est paire, i.e, $A_n = 0$ pour une fonction impaire.

Exercices

Exercice – 1

Soient les nombres complexes suivants :

$$\frac{3+j}{1-j} \quad , \quad \frac{1}{1+j} \quad , \quad \frac{3e^{j(\frac{\pi}{3})}}{2e^{j(\frac{\pi}{2})}} \quad , \quad e^{j(-\frac{\pi}{3})}$$

$$(3-2j)e^{j(\frac{\pi}{6})} \quad , \quad e^{j(\frac{\pi}{3})}+e^{j(-\frac{\pi}{2})} \quad , \quad j^j$$

1. Les écrire sous la forme $x+jy$.
2. Déduire leurs normes et arguments.

Exercice – 2

Trouver le résultat $x_3(t)$ de la superposition de $x_1(t)$ et $x_2(t)$ dans les cas suivants :

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= 2\cos\left(2t+\frac{\pi}{2}\right) \quad x_2(t)=2\sqrt{3}\cos\left(2t-\frac{\pi}{3}\right)\\
x_1(t) &= \sin\left(t+\frac{4\pi}{3}\right) \quad x_2(t)=\cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right)\\
x_1(t) &= \cos\left(t+\frac{2\pi}{3}\right) \quad x_2(t)=\cos\left(t-\frac{\pi}{6}\right)\\
x_1(t) &= \cos\left(t+\frac{\pi}{6}\right) \quad x_2(t)=\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

Exercice – 3

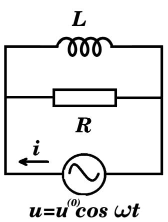
Soient les circuits électriques reproduits sur les Figures (a), (b), (c) et (d).

1. Trouver l'impédance complexe équivalente pour chaque circuit.
2. Déterminer les circuits qui peuvent avoir une impédance purement réelle. Quelle est la condition nécessaire pour cela.
3. Trouver le courant i dans la branche indiquée sur chaque circuit en utilisant la loi des mailles.

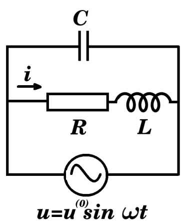
Exercice – 4

Soient les fonctions périodiques $f(t)$ dont les graphes sont représentés sur les Figures (e), (f) et (g).

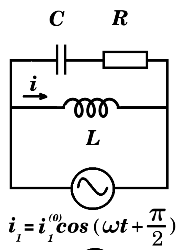
1. Déduire la période, la fréquence et la pulsation de chaque fonction.
2. Déduire la forme analytique de chaque fonction.
3. Trouver la décomposition en série de Fourier de chaque fonction.



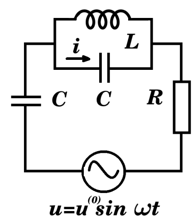
a



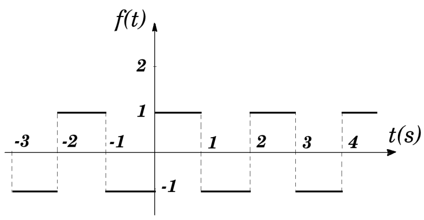
b



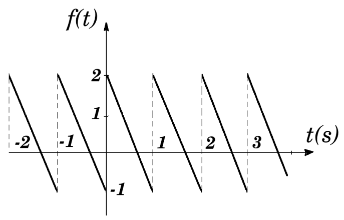
c



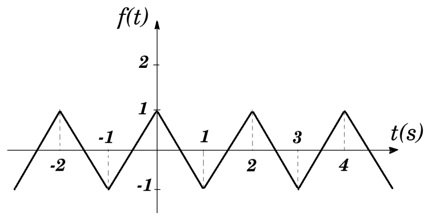
d



e



f



g

Chapitre 2

Systèmes Linéaires Libres à Un degré de Liberté

Sommaire

2.1 Introduction

- On s'interesse aux oscillations provoquées par une force de rappel autour d'une position d'équilibre.
- Un oscillateur qui ne subit aucune force excitatrice est dit : Oscillateur libre.
- Les degrés de liberté sont les variables indépendantes du système.

2.2 Oscillateur harmonique

L'oscillateur harmonique est le plus simple des systèmes oscillatoires et, surtout, le plus important. Il est caractérisé par ***une force de rappel qui dépend linéairement de l'écart par rapport à l'équilibre***.

2.2.1 Exemple du système masse-ressort horizontal

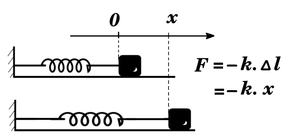


Fig. 2.1 – Oscillateur harmonique constitué d'une masse et un ressort.

Sur la figure (2.1) est représenté le système d'une masse m attachée à un ressort de constante k. A l'équilibre le ressort n'est pas déformé et n'exerce donc aucune force sur la masse. Si on écarte la masse de la position d'équilibre, le ressort s'allonge d'une distance Δl et produit une force de tension linéairement proportionnelle à cet l'allongement : $F = -k\,\Delta l$. On peut définir la coordonnée x sur l'axe Ox pour suivre la position de la masse. Si on fait en sorte que l'origine de l'axe coincide avec la position d'équilibre, alors la coordonnée x nous donne non seulement l'écart de la masse par rapport à la position d'équilibre mais aussi la déformation du ressort Δl. La force de tension devient alors $F = -k\,x$. On peut voir que cette force de tension constitue une force de rappel. Lorsque x est positive la force pointe vers le sens négatif et lorsque x est négatif on obtient une force vers le sens positif. Elle tend toujours à ramener le corps vers l'équilibre et elle est linéairement proportionnelle à l'écart x ce qui correspond à la définition de l'oscillateur harmonique.

L'application du principe fondamental de la dynamique sur la masse aprés projection des forces sur l'axe Ox nous donne :

$$-\,k\,x = m\ddot{x} \tag{2.1}$$

d'ou l'équation différentielle du mouvement à laquelle la masse doit obéir :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\,x = 0 \tag{2.2}$$

si on adopte la notation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, l'équation différentielle prend la forme :

$$\ddot{x} + \omega_0^2\,x = 0 \tag{2.3}$$

cette équation différentielle est caractéristique d'un système harmonique. Tout système décrit par une telle équation est un système harmonique. Cependant, on note la particularité importante qui est que le coéfficient de x doit être positif pour lui faire correspondre le terme ω_0^2. Cela est une condition nécessaire et suffisante pour avoir un système harmonique.

2.2.2 Exemple du système masse-ressort vertical

Sur la figure (2.2) est représenté le même système précédent mais le ressort est en disposition verticale. Lorsque le ressort est vide il a une certaine longueur. En lui attachant une masse m, il s'allonge d'une longueur x_0[1] et atteint une position d'équilibre. Puisque c'est une position d'équilibre ; la somme des forces exterieurs appliquées à la masse doit être égale à zero :

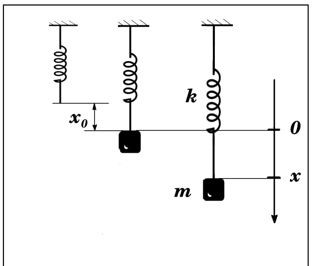


FIG. 2.2 – Oscillateur harmonique constitué d'une masse et un ressort vertical.

$$- k\,x_0 + mg = 0 \tag{2.4}$$

cette condition doit être satisfaite à l'équilibre[2]. Pour suivre le mouvement de la masse par rapport à la position d'équilibre, on définit un axe de la coordonnée x dont l'origine correspond à cette position d'équilibre. De cette manière si on applique le principe fondamental à la masse on obtient :

$$\begin{aligned} -k\,(x_0 + x)\, + mg &= m\ddot{x} \\ (-k\,x_0 + mg) - k\,x &= m\ddot{x} \end{aligned} \tag{2.5}$$

on reconnait entre parenthèses l'expression qui doit être nulle selon la condition d'équilibre donnée par l'équation (2.4). On obtient finalement :

$$\begin{aligned} -k\,x &= m\ddot{x} \\ \ddot{x} + \frac{k}{m}\,x &= 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

qui est la même équation (2.2) obtenue précédemment pour le système masse-ressort horizontal. La deuxième équation se ramène à la première grace à l'expression qui s'annule à l'équilibre (équation (2.4)). Cela est ainsi parce qu'on a choisi l'origine de l'axe Ox en coincidance avec la position d'équilibre.

2.2.3 Solution de l'équation du mouvement

L'équation différentielle de l'oscillateur harmonique (équation (2.2)) admet la solution sinusoïdal suivante :

$$x = A\,\sin(\omega_0 t + \phi) \tag{2.7}$$

l'amplitude A et la phase ϕ dépendent des conditions initiales. On a besoin de deux conditions initiales pour déterminer ces constantes. Le nombre des valeurs que peuvent prendre ces constantes est infini. On peut donc varier ces constantes en variant les conditions initiales. Au contraire, on voit que la pulsation du mouvement $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ dépend uniquement de la constante du ressort k et la masse m qui sont deux caractéristiques intrinsèque et propre au système. Elle est indépendante des conditions initiales. Pour cela, ω_0 est dite ***pulsation propre*** ou ***pulsation naturelle*** du sytème.

Plus généralement, un système qui a un degré de liberté q sera un oscillateur harmonique si :
- il obéit à l'équation différentielle : $\ddot{q} + \omega_0^2\,q = 0$
- il admet la solution : $q = q_0\,\sin(\omega_0 t + \phi)$
- la force de rappel est proportionnelle à l'écart.

2.2.4 Energie d'un oscillateur harmonique

L'application du principe fondamental de la dynamique au système masse-ressort représenté sur la figure (2.1) nous à donnée l'équation (2.1) suivante :

$$- k\,x = m\ddot{x}$$

en multipliant les deux membre par $\mathrm{d}x$ et en sachant que $\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t}$, cette dernière équation peut être réécrite :

$$- k\,x\,\mathrm{d}x = m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}\dot{x} \;\Rightarrow\; -k\,x\,\mathrm{d}x = m\dot{x}\,\mathrm{d}\dot{x} \tag{2.8}$$

en intégrant les deux membres :

$$-k\int x\,\mathrm{d}x = m\int \dot{x}\,\mathrm{d}\dot{x} \;\Rightarrow\; -\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \mathrm{cte} \tag{2.9}$$

écrit autrement :

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \mathrm{cte} \tag{2.10}$$

on voit que la somme ces deux termes reste constante dans le temps. Le premier terme $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ est l'énergie cinétique de la masse m et le second terme $\frac{1}{2}kx^2$ est appelé énergie potentielle élastique du ressort $U = \frac{1}{2}kx^2$ lorsqu'il a une déformation x. La somme de ces deux énergies est l'énergie totale du système $E = T + U$ qui reste donc constante dans le temps. L'énergie totale est conservée dans le temps. On dit que le système est conservatif.

On peut voir que l'énergie potentielle élastique du ressort et la force de tension sont reliés par un simple processus de différentiation :

$$F = -kx = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -\frac{\partial U}{\partial x} \tag{2.11}$$

on dit que la force de tension dérive du potentiel U. Ce résultat est un résultat général ; l'énergie totale du système est convervée si la force qui agit sur ce système dérive d'un potentiel U. Cela est toujours le cas pour un oscillateur harmonique. En effet, par définition, la force de rappel d'un oscillateur harmonique dépend linéairement de l'écart par rapport la position d'équilibre. Si l'écart, qui est le degré de liberté du système, est q il existe une la constante positive a tel que la force de rappel soit $F = -aq$. En définissant la fonction $U = \frac{1}{2}aq^2$ on voit que la force dérive de cette fonction par la relation $F = -\dfrac{\partial U}{\partial q}$.

[1] Notons que la déformation initiale x_0 est la différence entre la longueur finale l et la longueur initiale l_0 du ressort : $x_0 = l - l_0$ c'est une grandeur algébrique qui peut être positive (allongement) ou négative (compression) elle n'a aucune relation avec l'axe Ox qu'on va définir par la suite.

[2] bien que cette condition est déduite à l'équilibre elle est aussi valable hors équilibre puisqu'elle ne met en relation que des constantes. Si cette combinaison de constantes est valable à l'équilibre elle doit aussi être valable hors équilibre.

Donc ***l'oscillateur harmonique, quelque soit sa nature, est un système conservatif***.

Cette conservation de l'énergie totale d'un système harmonique permet de simplifier leur traitement. Par exemple, pour trouver l'équation du mouvement du système masse-ressort précédent on peut evaluer l'énergie totale en evaluant l'énergie cinétique $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ et l'énergie potentielle $U = \frac{1}{2}kx^2$. En sachant que l'énergie totale est constante dans le temps :

$$E = \text{cte} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = 0 \tag{2.12}$$

donc :

$$m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x}(m\ddot{x} + kx) = 0 \tag{2.13}$$

la vitesse $\dot{x}$ ne peut être nulle à tout instant t, on déduit :

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{2.14}$$

qui est l'équation du mouvement retrouvée précédemment.

2.3 Oscillateur anharmonique

Un oscillateur controlé par une force de rappel est harmonique lorsque la force de rappel est proportionnelle à l'écart. Cettea dépendance linéaire de la force rappel avec l'écart par rapport à la position d'équilibre est un cas particulier. Dans le cas général cette dépendance n'est pas forcément linéaire. On dit que le système est ***anharmonique***.

Considérant l'exemple du pendule représenté sur la figure (2.3). Il est constitué d'une barre de longueur l et de masse négligeable et d'une masse m qu'on considère comme ponctuelle. Le pendule peut osciller autour de l'axe (Δ) sans frottement. Pour trouver l'équation du mouvement on utilise le principe fondamental de la dynamique pour les mouvements de rotation :

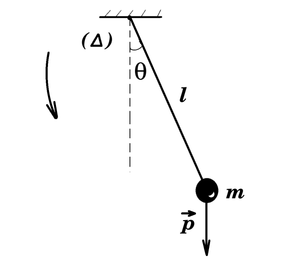


FIG. 2.3 – Le pendule est un oscillateur anharmonique qui devient harmonique lorsque l'amplitude est suffisament faible. La flêche à gauche indique le sens positif des rotations.

$$\sum \mathcal{M} = I\,\ddot{\theta}$$

$\sum \mathcal{M}$ étant la somme des moments des forces exterieures appliquées au pendule. I est le moment d'inertie par rapport à l'axe (Δ). Les forces exterieures qui agissent sur le système sont le poid $\vec{p}$ de la masse et l'action du point d'attache dont le moment est nul. Le moment d'inertie $I = ml^2$. On obtient :

$$-\,mg\,l\,\sin\theta = ml^2\,\ddot{\theta} \tag{2.15}$$

aprés réarrangement on trouve :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \tag{2.16}$$

qui est l'équation différentielle du mouvement. Bien que le pendule effectue un mouvement oscillatoire autour d'une position d'équilibre, son équation différentielle n'a pas la forme de l'équation (2.3) indiquant qu'il n'est pas un oscillateur harmonique. Cependant, si on se restreint aux oscillations d'amplitude suffisament faible, on peut admettre l'approximation des petits angles[3] selon laquelle $\sin\theta \simeq \theta$. L'équation différentielle précédente devient :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\,\theta = 0 \tag{2.17}$$

qui est l'équation d'un oscillateur harmonique. Ceci montre que le pendule devient harmonique à partir du moment ou l'approximation des faibles angles devient valide. Cet exemple est une illustration parfaite d'un résultat général qu'on peut énoncer comme suit : ***Tout oscillateur anharmonique controlé par une force de rappel devient harmonique lorsque l'amplitude des oscillations devient suffisament faible***. Ce résultat dénote l'importance de l'oscillateur harmonique car tout les système oscillatoires provoqués par une force de rappel quelque soit leur nature ou leur complexité deviennent harmonique dans certaines limites.

2.4 Position et stabilité de l'équilibre

La force de rappel qui agit sur un oscillateur s'annule à l'équilibre. Si le système est conservatif, ce qui est le cas de l'oscillateur harmonique, la force doit dériver d'un potentiel U tel que $F = -\dfrac{\partial U}{\partial x}$ (en supposant que le degré de liberté du système est x). La force s'annule à l'équilibre ce qui implique que $\dfrac{\partial U}{\partial x} = 0$. Donc pour trouver la position (ou les positions) d'équilibre on doit trouver les valeur de x qui annulent la dérivée de la fonction U. Trois situations sont alors possible pour la fonction U. Ces situations sont illustrées sur le graphique de la figure (2.4).

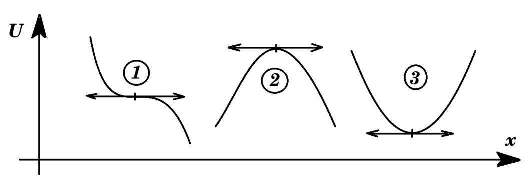


FIG. 2.4 – le graphe d'une fonction continue U dont la dérivée $\frac{\partial U}{\partial x}$ s'annule peut presenter soit un extremum (minimum ou maximum) ou simplement un point d'inflexion .

Dans le premier cas, l'équilibre correspond à un point critique qui est un point d'inflexion pour lequel la deuxième dérivée s'annule $\left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0\right)$ mais la première dérivée ne change pas de signe. Ce potentiel U ne peut donner un mouvement oscillatoire car la première dérivée nous donne la force selon $F = -\dfrac{\partial U}{\partial x}$ qui ne change pas de signe

[3]Une question qui se pose : Quand est-ce qu'on considère qu'un angle est suffisament petit pour admettre l'approximation $\sin\theta \simeq \theta$? Celà dépend de l'erreur admissible dans le problème. En effet, en utilisant l'approximation $\sin\theta \simeq \theta$, qui est une troncature du dévellopement de Taylor de la fonction sinus autour du zero, on commet une erreur qu'on peut estimer par la formule de Lagrange du reste de la série de Taylor. On se rend compte que l'erreur augmente avec l'angle. Donc l'intervalle de validité de l'approximation dépend de la précision souhaitée (voir un cours de méthodes numériques pour plus de détails).

en passant d'un coté à l'autre de l'équilibre ce qui ne correspond pas à une force de rappel. Dans le deuxième cas, correspondant à un maximum, en s'écartant de l'équilibre on obtient une force qui nous éloigne encore plus de l'équilibre. Dans ces deux cas on dit que l'***équilibre est instable*** car il existe au moins une perturbation qui fait que, une fois appliquée au système, ce dernier ne peut revenir vers l'équilibre et les forces obtenues ne sont pas des forces de rappel. Dans le troisième cas, un écart de la position d'équilibre fait apparaitre une force qui nous ramène toujours vers l'équilibre et la force obtenue est donc une force de rappel. Pour cette raison cet équilibre est dit ***équilibre stable***.

En examinant les trois possibilités précédentes on peut voir qu'une condition simple portant sur la deuxième dérivée $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ permet de résumé ces trois situations :

– $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \leq 0 \quad \Rightarrow$ équilibre instable.
– $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} > 0 \quad \Rightarrow$ équilibre stable.

Donc pour avoir un mouvement oscillatoire il est nécessaire que $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} > 0$.

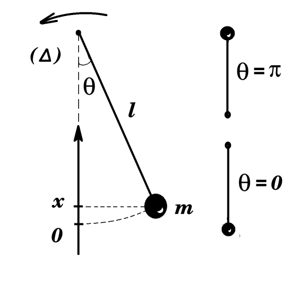


FIG. 2.5 – Pendule avec deux positions d'équilibre possibles. Equilibre stable pour $\theta = 0$. Instable pour $\theta = \pi$.

Pour illustrer cette condition, considérant l'exemple du pendule représenté sur la figure (2.5) formé d'une masse ponctuelle m fixée à la tige de masse négligeable et de longueur l. Pour estimer l'énergie potentielle U, on définie un axe d'une coordonnée x dont le zéro coincide avec la position de la masse lorsqu'elle est au plus bas (c'est à dire lorsque $\theta = 0$). De cette manière, la coordonnée x nous donne la hauteur de la masse mesurée à partir de cette position qu'on va aussi choisir comme l'origine de l'énergie potentielle. Cette énergie potentielle qui est proportionnelle à la hauteur de la masse sera donnée par[4] $U = mgx$. Cependant d'aprés la figure on voit que $x = l - l\cos\theta$. Donc $U = mgl\,(1 - \cos\theta)$. On peut rechercher les positions d'équilibre en cherchant la solution de l'équation $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow mgl\,\sin\theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \\ \theta = \pi \end{cases} \tag{2.18}$$

on trouve deux positions d'équilibres possibles pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. On peut tester la stabilité de ces deux positions en calculant la deuxième dérivée de l'énergie potentielle pour ces deux angles :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = mgl\cos\theta = \begin{cases} mgl > 0 & \text{pour } \theta = 0 \\ -mgl < 0 & \text{pour } \theta = \pi \end{cases} \tag{2.19}$$

lorsque $\theta = 0$ on obtient un équilibre stable pour lequel le système peut effectuer un mouvement oscillatoire s'il est perturbé. Mais lorsque $\theta = \pi$ l'équilibre est instable, donc si le système est écarté de cet équilibre il ne pourra plus revenir par lui même et s'écartera encore plus.

Son énergie cinétique de rotation est $T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$. Le moment d'inertie de la masse ponctuelle par rapport à l'axe de rotation (Δ) est $I = ml^2$. Donc $T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$.

2.5 Equation de Lagrange

Les problèmes de la mécanique classique peuvent être résolus par le formalisme Newtonien basé sur le concept des forces. Dans le cas particulier ou les forces sont conservatives on peut décrire et résoudre les problèmes en utilisant les énergies sans avoir recours aux forces. Une troisième alternative qui est le formalisme Lagrangien est aussi possible. Elle est aussi général que le fromalisme Newtonien mais qui permet de simplifier énormément les choses dans les système complexes.

Dans le formalisme de Lagrange, l'équation du mouvement pour une sytème convervatif à un degré de liberté q est obtenue à partir de l'équation de Lagrange :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \tag{2.20}$$

dans laquelle L est le Lagrangien du système. Il correspond à la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle $L = T - U$.

Comme exemple on peut trouver l'équation du mouvement du pendule précédent (figure (2.5)) par le formalisme Lagrangien. On a déjà évalué l'énergie potentielle :

$$U = mgl\,(1 - \cos\theta) \tag{2.21}$$

reste à trouver l'énergie cinétique qui est une énergie cinétique de rotation rotation est $T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$. Le moment d'inertie de la masse ponctuelle par rapport à l'axe de rotation (Δ) est $I = ml^2$. Donc :

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \tag{2.22}$$

On obtient le Lagrangien :

$$L = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl\,(1 - \cos\theta) \tag{2.23}$$

le premier terme de l'équation de Lagrange (équation (2.20)) nous donne :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} \tag{2.24}$$

et le second terme :

$$-\frac{\partial L}{\partial \theta} = mgl\,\sin\theta \tag{2.25}$$

donc la somme des deux termes :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = ml^2\ddot{\theta} + mgl\,\sin\theta = 0 \tag{2.26}$$

aprés simplification on obtient la même équation obtenue précédemment (équation(2.16)) :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0 \tag{2.27}$$

en remarque encore une fois que ce n'est pas l'équation d'un oscillateur harmonique mais qui devient harmonique en adoptant l'approximation des faibles angles $\sin\theta \simeq \theta$:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{2.28}$$

[4]Notons que si on choisi le sens positif de l'axe vers le bas on aura $U = -mgx$.

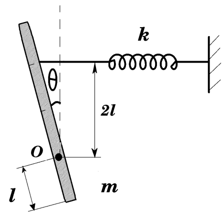
2.6 Conclusion

On a vu que l'étude des systèmes oscillatoires peut se faire par trois méthodologies. On peut adopter le principe fondamental de la dynamique. On peut aussi exploiter le principe de conservation de l énergie totale lorsque les forces sont conservatives, et surtout on peut tiliser le formalisme Lagrangien qui est aussi général que le principe fondamenta de la dynamique (et même plus à certains égards) et qui permet de simplifier grandement le traitement des systèmes complexes.

On dénote aussi la grande importance de l'oscillateur harmonique ; car quasiment tout les systèmes oscillatoires qu'on trouve dans la pratique deviennent harmonique pour les faibles amplitudes d'oscillations.

Exercices

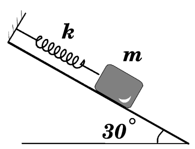
Exercice – 5



Dans le système ci-contre, la barre de masse m et de longueur $4l$ peut tourner autour de l'axe passant par O sans frottement. A l'équilibre la tige est verticale (donc le ressort n'est pas déformé). On écarte la tige de la verticale d'un angle suffisament faible pour admettre que $\sin\theta \simeq \theta$ et $\tan\theta \simeq \theta$.

1. Trouver l'équation differentielle du mouvement en utilisant le principe fondamental de la dynamique pour les mouvements de rotation.
2. Quelle est la condition que le système doit satisfaire pour avoir un mouvement oscillatoire.

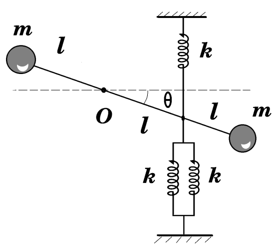
Exercice – 6



Soit le système ci-contre, La masse peut glisser sans frottement sur le plan. On abandonne le système après l'avoir écarté de la position d'équilibre.

1. Exprimer l'énergie potentielle du système U.
2. Déduire la condition d'équilibre, trouver la déformation du ressort à l'équilibre et Simplifier l'expression de U.
3. Exprimer l'énergie totale du système et déduire l'équation du mouvement avec le principe de conservation de l'énergie totale.

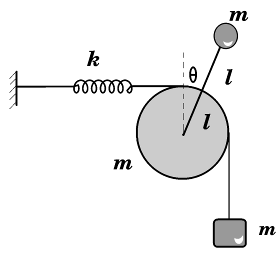
Exercice – 7



Dans le sytème suivant, La tige et les ressorts sont de masse négligeable. La tige peut tourner sans frottement autour de l'axe passant par O. On considère que les masses sont ponctuelles. A l'équilibre la tige est horizontale. On abandonne le système après l'avoir écarté de l'horizontale d'un angle θ suffisament petit pour admettre que $\sin\theta \simeq \theta$.

1. Trouver la constante du ressort équivalent au trois ressorts du système et les remplacer par ce ressort. Dans la suite, on suppose que la déformation du ressort équivalent à l'équilibre est x_0.
2. Exprimer l'énergie potentielle U du système en fonction de θ.
3. Trouver la condition que le système doit vérifier pour être à l'équilibre lorsque la tige est horizontale. Déduire la déformation initiale x_0 du ressort ensuite simplifier U.
4. Donner l'expression de l'énergie cinétique T du système et déduire le Lagangien.
5. Trouver l'équation du mouvement en utilisant l'équation de Lagrange puis en utilisant le principe de conservation de l'énergie. Déduire la pulsation naturelle du système.

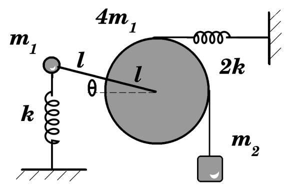
Exercice – 8



Dans ce système, on suppose que la poulie peut tourner autour de son centre sans frottement. Le fil est de masse négligeable et ne glisse pas sur la poulie. Le ressort est aussi de masse négligeable. A l'équilibre, la tige est verticale. La poulie est écartée de l'équilibre d'un petit angle θ puis relachée. On considère que θ est suffisament petit pour admettre que $\tan\theta \simeq \theta$ et $\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$.

1. Evaluer l'énergie potentielle U du système en fonction de θ.
2. Ecrire la condition d'équilibre à partir de U. Déduire l'allogement initial x_0 du ressort et simpilifier l'expression de U.
3. Déduire la condition nécessaire pour que le système puisse osciller.
4. Evaluer l'énergie cinétique du système et Déduire le Lagrangien.
5. Trouver l'équation du mouvement en utilisant l'équation de Lagrange puis en utilisant le principe de conservation de l'énergie.

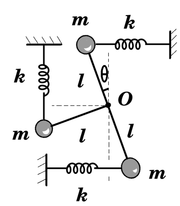
Exercice – 9



Dans ce système, on suppose que la poulie peut tourner autour de son centre sans frottement. Le fil est de masse négligeable et ne glisse pas sur la poulie. A l'équilibre, la tige est horizontale et le ressort vertical n'est pas déformé. La poulie est écartée de l'équilibre d'un petit angle θ puis relachée. On considère que θ est suffisament petit pour admettre que $\sin\theta \simeq \theta$.

1. Exprimer l'énergie potentielle U du système en fonction de θ.
2. Ecrire la condition d'équilibre à partir de U. Déduire l'allogement initial x_0 du ressort de constante $2k$ puis simpilifier l'expression de U.
3. Quelle est la valeur que doit avoir m_2 en fonction de m_1 pour que x_0 soit nulle.
4. On suppose que $m_2 = 2m_1 = m$. Trouver l'énergie cinétique T du système et déduire le lagrangien.
5. Déduire l'équation du mouvement en utilisant l'équation de Lagrange.

Exercice – 10



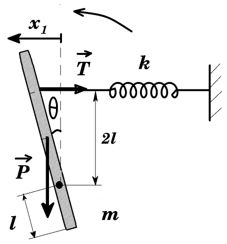
Dans le système ci-contre, les deux tiges de masses négligeables sont perpendiculaires. A l'équilibre, la tige de longeur l est horizontale . On relache la barre après l'avoir écarté de la position d'équilibre d'un angle θ suffisament petit pour admettre que $\sin\theta \simeq \theta$ et $\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$. En utilisant le principe de conservation de l'énergie totale, démontrer qu'on obtient un mouvement oscillatoire et trouver sa pulsation naturelle.

Solutions

Solution de l'exercice 5

Pour un corps en rotation, le principe fondamental de la dynamique prend la forme particulière suivante :

$$\sum \mathcal{M} = I\,\ddot{\theta}$$



L'axe Ox_1 nous donne l'allongement du ressort à partir de la position d'équilibre. On tenant compte de la direction positive choisie pour les rotations, le bilan des moments, sans considérer l'action de l'axe sur la tige qui a un moment nul, s'écrit[5] :

$$-\,k\,x_1.2l + mg.l\tan\theta = I\,\ddot{\theta}$$

mais puisque $x_1 = 2l.\tan\theta \simeq 2l.\theta$ on obtient :

$$-\,k\,4l^2.\theta + mg.l\theta = I\,\ddot{\theta} \quad \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{(4kl^2 - mgl)}{I}\,\theta = 0$$

le moment d'inertie de la barre par rapport à la axe passant par le centre de masse est $I_{cm} = \frac{1}{12}m(4l)^2 = \frac{4}{3}ml^2$. On peut utiliser le théorème des axes parallèles pour avoir le moment d'inertie par rapport à l'axe passant par le point O :

$$I_O = I_{cm} + ml^2 = \frac{4}{3}ml^2 + ml^2 = \frac{7}{3}ml^2$$

donc l'équation du mouvement devient :

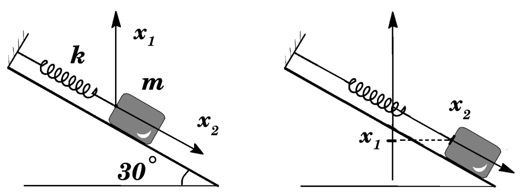
$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{3(4kl - mg)}{7ml}\,\theta = 0}$$

pour avoir oscillation il faut pouvoir identifier cette équation avec l'équation de l'oscillateur harmonique $\ddot{x} + \omega_0^2\,x = 0$. Le coéfficient de θ qui doit être égale au carré de la pulsation du mouvement ω_0^2 doit être positif :

$$\omega_0^2 = \frac{3(4kl - mg)}{7ml} > 0 \quad \Rightarrow \boxed{mg - 4kl > 0}$$

qui est la condition pour que le système puisse osciller.

Solution de l'exercice 6



$$\text{énergie potentielle} \Rightarrow \begin{cases} \text{ressort} \Rightarrow \text{l'axe } Ox_2 \\ \text{gravitation} \Rightarrow \text{l'axe } Ox_1 \end{cases}$$

$\boxed{1}$ la masse en position d'équilibre est représentée sur la figure de gauche. Lorsqu'elle est écartée de l'équilibre (figure de droite) sa position est x_2 suivant l'axe Ox_2 et x_1 suivant l'axe Ox_1. L'allongement du ressort est $x_2 + x_0$ avec x_0 l'allongement déjà présent à l'équilibre. L'expression de l'énergie potentielle prend alors la forme :

$$U = \frac{1}{2}k(x_2 + x_0)^2 + mgx_1$$

les deux coordonnées x_2 et x_1 sont reliée par $x_1 = -x_2.\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}x_2$. on peut garder une seule coordonnée qu'on considère comme le degré de liberté du système[6] :

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}k(x_2 + x_0)^2 - \frac{1}{2}mgx_2 \\ &= \frac{1}{2}kx_2^2 + \left(kx_0 - \frac{1}{2}mg\right)x_2 + \frac{1}{2}kx_0^2 \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ A l'équilibre la dérivée de l'énergie potentielle s'annule $\frac{\partial U}{\partial x_2} = 0$, donc :

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = kx_2 + \left(kx_0 - \frac{1}{2}mg\right) = 0$$

mais aussi $x_2 = 0$ par définition (puisqu'on a choisi l'origine des axes coincidant avec la position d'équilibre), on déduit la condition d'équilibre ensuite l'allongement à l'équilibre x_0 :

$$\boxed{kx_0 - \frac{1}{2}mg = 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_0 = \frac{mg}{2k}}$$

cette condition[7] permet de simplifier l'expression de U :

$$\boxed{U = \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}kx_0^2}$$

$\boxed{3}$ L'énergie totale du système est $E = T + U$. Mais l'énergie cinétique $T = \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2$ donc :

$$\boxed{E = \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + \frac{1}{2}kx_0^2}$$

le système étant conservatif, l'énergie totale est constante donc :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = m\dot{x}_2\ddot{x}_2 + kx_2\dot{x}_2 = \dot{x}_2\left(m\ddot{x}_2 + kx_2\right) = 0$$

[5] Notons que lorsqu'on travail aves les forces, on adopte les approximations d'ordre deux : $\cos\theta \simeq 1$, $\sin\theta \simeq \theta$ et $\tan\theta \simeq \theta$. Par contre pour les énergies, on adopte les approximations d'ordre trois : $\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$, $\sin\theta \simeq \theta$ et $\tan\theta \simeq \theta$. Ceci est la conséquence directe dur fait que les forces dérivent des énergies. Cela est parfaitement visible dans le dévellopement de Taylor. En dérivant une erreur d'ordre trois on obtient une erreur d'ordre deux. L'erreur augmente par la dérivation et diminue par l'intégration.

[6] En remarque que l'énergie potentielle est de la forme :$U = ax^2 + bx + c$.

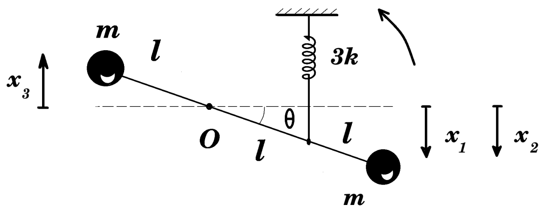
[7] On remarque que cette condition implique que le coéfficient b dans la forme polynômiale $U = ax^2 + bx + c$ égale zéro. Il ne reste que le terme quadratique et la constante c.

la vitesse de la masse $v = \dot{x}_2$ ne peut être égale à zéro à tout instant t, donc :

$$\boxed{\ddot{x}_2 + \frac{k}{m} x_2 = 0}$$

qui est l'équation du mouvement.

Solution de l'exercice 7



$\boxed{1}$ Le montage des trois ressorts est équivalent à trois ressorts en parallèles : $\boxed{k_{eq} = 3k}$

$\boxed{2}$

$$\text{énergie potentielle} \Rightarrow \begin{cases} \text{ressort} \Rightarrow \text{l'axe } Ox_1 \\ \text{grav. } m \text{ droite} \Rightarrow \text{l'axe } Ox_2 \\ \text{grav. } m \text{ gauche} \Rightarrow \text{l'axe } Ox_3 \end{cases}$$

en fonction des trois coordonnées x_1, x_2 et x_3 définies sur la figure, on peut écrire l'expression de l'énergie potentielle du système (x_0 est la déformation du ressort à l'équilibre) :

$$U = \underbrace{\frac{3}{2}k(x_1 + x_0)^2}_{\text{ressort}} \underbrace{-mgx_2}_{m \text{ à droite}} \underbrace{+mgx_3}_{m \text{ à gauche}}$$

mais les trois coordonnées x_1, x_2 et x_3 dépendent de θ comme suit :

$$\begin{aligned} x_1 &= -l\sin\theta \simeq -l\theta \\ x_2 &= -2l\sin\theta \simeq -2l\theta \\ x_3 &= -l\sin\theta \simeq -l\theta \end{aligned}$$

en remplaçant l'expression de ces coordonnées dans U :

$$U = \frac{3}{2}k(x_0 - l\theta)^2 + 2mgl\theta - mgl\theta$$

aprés réarrangement [8] :

$$\boxed{U = \frac{3}{2}kl^2\,\theta^2 + (mg - 3kx_0)\,l\,\theta + \frac{3}{2}kx_0^2}$$

$\boxed{3}$ A l'équilibre : $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$:

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = 3kl^2\,\theta + (mg - 3kx_0)\,l = 0$$

mais aussi, à l'équilibre $\theta = 0$, donc la condition d'équilibre devient :

$$\boxed{mg - 3kx_0 = 0} \Rightarrow \boxed{x_0 = \frac{mg}{3k}}$$

ce qui nous permet de simplifier [9] l'expression de U :

$$\boxed{U = \frac{3}{2}kl^2\,\theta^2 + \frac{3}{2}kx_0^2}$$

$\boxed{4}$ l'énergie cinétique du système en rotation est :

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(ml^2 + m(2l)^2\right)\dot{\theta}^2 \Rightarrow \boxed{T = \frac{5}{2}ml^2\dot{\theta}^2}$$

le Lagrangien du système est :

$$L = T - U \Rightarrow \boxed{L = \frac{5}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{3}{2}kl^2\,\theta^2 - \frac{3}{2}kx_0^2}$$

$\boxed{5}$ L'équation de Lagrange :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 5ml^2\ddot{\theta} + 3kl^2\,\theta = 0$$

donc l'équation du mouvement est :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{3k}{5m}\,\theta = 0}$$

On peut aussi utiliser l'énergie totale du sytème :

$$E = T + U = \frac{5}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{3}{2}kl^2\,\theta^2 + \frac{3}{2}kx_0^2$$

cette énergie est conservée :

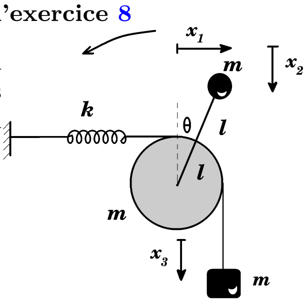
$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 5ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + 3kl^2\theta\dot{\theta} = \dot{\theta}\left(5ml^2\ddot{\theta} + 3kl^2\theta\right) = 0$$

la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ ne peut être nulle à tout instant t, on obtient la même équation du mouvement précédente et la pulsation ω_0 :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{3k}{5m}\,\theta = 0} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{5m}}}$$

Solution de l'exercice 8

$\boxed{1}$ l'énergie potentielle du système par rapport aux axes définis à partir de la position d'équilibre :



$$U = \underbrace{\frac{1}{2}k(x_1 + x_0)^2}_{\text{ressort}}$$

$$\underbrace{-mgx_2}_{m \text{ en haut}} \underbrace{-mgx_3}_{m \text{ en bas}}$$

[8] remarquant encore une fois que la forme de l'énergie potentielle, comme l'exercice précédent, est un polynôme du deuxième degré : $U = a\theta^2 + b\theta + c$. En réalité cette forme de l'énerie potentielle est caratéristique d'un oscillateur harmonique. Cela est du au fait que lorsque l'écart par rapport à la position d'équilibre est faible l'énergie potentielle d'une force de rappel a toujours un comportement harmonique. Cela montre simplement le fait que *tout oscillateur controlé par une force de rappel devient harmonique lorsque l'amplitude devient suffisament faible.*

[9] On remarque encore que le coéfficient b dans l'expression de l'énergie potentielle s'annule. On retrouve toujours ce résultat pour un oscillateur harmonique grace au choix judicieux des axes qui est de faire coincider les origines de ces axes avec la position d'équilibre pour évaluer l'énergie potentielle élastique des ressorts.

mais les trois coordonnées x_1, x_2 et x_3 dépendent de θ comme suit[10] :

$$\begin{aligned} x_1 &= -l\tan\theta \simeq -l\theta \\ x_2 &= 2l(1-\cos\theta) \simeq l\theta^2 \\ x_3 &= -l\theta \end{aligned}$$

en remplaçant l'expression de ces coordonnées dans U :

$$U = \frac{1}{2}k(x_0 - l\theta)^2 - mgl\theta^2 + mgl\theta$$

aprés réarrangement :

$$\boxed{U = \left(\frac{1}{2}kl^2 - mgl\right)\theta^2 + (mg - kx_0)\,l\,\theta + \frac{1}{2}kx_0^2}$$

$\boxed{2}$ A l'équilibre $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$:

$$\left(kl^2 - 2mgl\right)\theta + (mg - kx_0)\,l = 0$$

mais aussi, à l'équilibre $\theta = 0$, donc la condition d'équilibre devient :

$$\boxed{mg - kx_0 = 0} \;\Rightarrow\; \boxed{x_0 = \frac{mg}{k}}$$

ce qui nous permet de simplifier l'expression de U :

$$\boxed{U = \left(\frac{1}{2}kl^2 - mgl\right)\theta^2 + \frac{1}{2}kx_0^2}$$

$\boxed{3}$ Pour avoir des oscillations il faut que l'équilibre précédent soit stable. Pour cela la deuxième dérivée doit être positive :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = kl^2 - 2mgl > 0 \;\Rightarrow\; \boxed{kl - 2mg > 0}$$

$\boxed{4}$ L'énergie cinétique est la somme de l'énergie cinétique de la poulie et la tige avec la masse ponctuelle plus l'énergie de translation de la masse attachée au fil :

$$T = \frac{1}{2}I\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m\dot x_3^2$$

mais : $I = \frac{1}{2}ml^2 + m(2l)^2 = \frac{9}{2}ml^2$ et $x_3 = -l\theta \Rightarrow \dot x_3 = -l\dot\theta$ donc :

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}ml^2\right)\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m\left(-l\dot\theta\right)^2 \;\Rightarrow\; \boxed{T = \frac{11}{4}ml^2\dot\theta^2}$$

le Lagrangien s'écrit :

$$\boxed{L = T - U = \frac{11}{4}ml^2\dot\theta^2 - \left(\frac{1}{2}kl^2 - mgl\right)\theta^2 - \frac{1}{2}kx_0^2}$$

$\boxed{5}$ L'équation du mouvement avec le Lagrangien :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{11}{2}ml^2\ddot\theta + \left(kl^2 - 2mgl\right)\theta = 0$$

$$\boxed{\ddot\theta + \frac{2kl - 4mg}{11ml}\theta = 0}$$

On peut aussi utiliser l'énergie totale du sytème :

$$E = T + U = \frac{11}{4}ml^2\dot\theta^2 + \left(\frac{1}{2}kl^2 - mgl\right)\theta^2 + \frac{1}{2}kx_0^2$$

cette énergie est conservée :

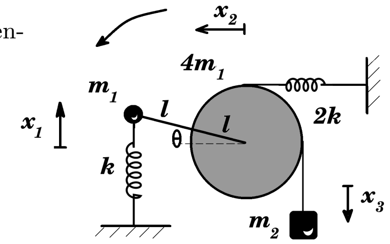
$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{11}{2}ml^2\dot\theta\ddot\theta + \left(kl^2 - 2mgl\right)\theta\dot\theta = 0$$

$$\dot\theta\left(\frac{11}{2}ml^2\ddot\theta + \left(kl^2 - 2mgl\right)\theta\right) = 0$$

puisque la vitesse angulaire $\dot\theta$ ne peut être nulle à tout instant t, on obtient :

$$\boxed{\ddot\theta + \frac{2kl - 4mg}{11ml}\theta = 0} \;\Rightarrow\; \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2kl - 4mg}{11ml}}}$$

Solution de l'exercice 9



$\boxed{1}$ l'énergie potentielle du système :

$$U = \underbrace{\frac{1}{2}2k(x_2 + x_0)^2}_{\text{ressort } 2k} + \underbrace{\frac{1}{2}kx_1^2}_{\text{ressort } k} + m_1 g x_1 - m_2 g x_3$$

mais les trois coordonnées x_1, x_2 et x_3 dépendent de θ comme suit :

$$\begin{aligned} x_1 &= -2l\sin\theta \simeq -2l\theta \\ x_2 &= l\tan\theta \simeq l\theta \\ x_3 &= -l\theta \end{aligned}$$

en remplaçant l'expression de ces coordonnées dans U :

$$U = k(l\theta + x_0)^2 + \frac{1}{2}k(-2l\theta)^2 + m_1 g(-2l\theta) - m_2 g(-l\theta)$$

aprés réarrangement :

$$\boxed{U = 3kl^2\theta^2 + (2kx_0 + (m_2 - 2m_1)g)\,l\,\theta + kx_0^2}$$

$\boxed{2}$ A l'équilibre $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$:

$$6kl^2\theta + (2kx_0 + (m_2 - 2m_1)g)\,l = 0$$

mais aussi, à l'équilibre $\theta = 0$, donc la condition d'équilibre devient :

$$\boxed{2kx_0 + (m_2 - 2m_1)g = 0} \;\Rightarrow\; \boxed{x_0 = \frac{(2m_1 - m_2)g}{2k}}$$

ce qui nous permet de simplifier l'expression de U :

$$\boxed{U = 3kl^2\theta^2 + kx_0^2}$$

$\boxed{3}$ Pour que $x_0 = 0$ on doit avoir :

$$x_0 = \frac{(2m_1 - m_2)g}{2k} = 0 \;\Rightarrow\; 2m_1 - m_2 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{m_2 = 2m_1}$$

$\boxed{4}$ L'énergie cinétique est la somme de l'énergie cinétique de la poulie et la tige (de rotation) plus l'énergie cinétique

[10] En supposant que le ressort ne s'enroule pas sur la poulie mais reste horizontal. Si le ressort s'enroule sur la poulie en obtient $x_1 = -l\theta$

de translation de la masse attachée au fil (en sachant que $m_1 = \frac{m}{2}$, $m_2 = m$ et $x_0 = 0$) :

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_3^2$$

mais : $I = \frac{1}{2}(2m)l^2 + \frac{m}{2}(2l)^2 = 3ml^2$ et $x_3 = -l\theta \Rightarrow \dot{x}_3 = -l\dot{\theta}$ donc :

$$T = \frac{1}{2}\left(3ml^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\left(-l\dot{\theta}\right)^2 \Rightarrow \boxed{T = 2ml^2\dot{\theta}^2}$$

le Lagrangien s'écrit :

$$\boxed{L = T - U = 2ml^2\dot{\theta}^2 - 3kl^2\theta^2}$$

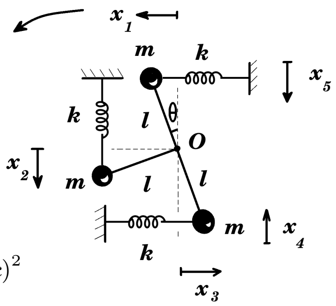
$\boxed{5}$ L'équation du mouvement avec le Lagrangien :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 4ml^2\ddot{\theta} + 6kl^2\,\theta = 0$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{3k}{2m}\,\theta = 0}$$

Solution de l'exercice 10

On suppose qu'à l'équilibre les trois ressorts ont les déformations a, b et c. L'énergie potentielle du système prend la forme :



$$U = \frac{1}{2}k(x_1 + a)^2$$
$$+\frac{1}{2}k(x_2 + b)^2 + \frac{1}{2}k(x_3 + c)^2$$
$$-mgx_2 - mgx_5 + mgx_4$$

mais les coordonnées x_i dépendent de θ comme suit :

$$x_1 = x_2 = x_3 \simeq l\theta$$
$$x_4 = x_5 \simeq \frac{1}{2}l\theta^2$$

en remplaçant l'expression de ces coordonnées dans U :

$$U = \frac{1}{2}k(l\theta+a)^2+\frac{1}{2}k(l\theta+b)^2+\frac{1}{2}k(l\theta+c)^2-mgl\theta-\frac{1}{2}mgl\theta^2+\frac{1}{2}mgl\theta^2$$

aprés réarrangement :

$$\boxed{U = \frac{3}{2}kl^2\theta^2 + \left(k(a+b+c) - mg\right)l\,\theta + \frac{1}{2}k(a^2+b^2+c^2)}$$

A l'équilibre $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$:

$$3kl^2\theta + \left(k(a+b+c) - mg\right)l = 0$$

mais aussi, à l'équilibre $\theta = 0$, donc la condition d'équilibre devient :

$$\boxed{k(a+b+c) - mg = 0}$$

ce qui nous permet de simplifier l'expression de U :

$$\boxed{U = \frac{3}{2}kl^2\theta^2 + \frac{1}{2}k(a^2+b^2+c^2)}$$

L'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{3}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

l'énergie totale du sytème :

$$E = T + U = \frac{3}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{3}{2}kl^2\theta^2 + \frac{1}{2}k(a^2+b^2+c^2)$$

cette énergie est conservée (on note aussi que le dernier terme est une constante) :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 3ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + 3kl^2\theta\dot{\theta} = 0$$

$$\dot{\theta}\left(m\ddot{\theta} + k\theta\right) = 0$$

puisque la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ ne peut être nulle à tout instant t, on obtient l'équation du mouvement :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{k}{m}\,\theta = 0} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Chapitre 3

Systèmes Linéaires Amortis à Un degré de Liberté

Sommaire

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, on a étudié des systèmes oscillatoires simple et surtout idéalisé. Par exemple, l'oscillateur harmonique à un degré de liberté q obéit à l'équation du mouvement suivante :

$$\ddot{q} + \omega_0^2\, q = 0 \tag{3.1}$$

elle admet la solution sinusoïdale :

$$q = q_0\, \sin(\omega_0 t + \phi) \tag{3.2}$$

indiquant que le système effectue un mouvement parfaitement périodique qui se répète toujours et qui ne s'arrête jamais. L'énergie du système change de forme continuellement mais elle est conservée. Dans la réalité, les système mécanique qu'on rencontre, comme le système mass-ressort ou le pendule, oscillent autour de l'équilibre mais on constate une diminution de l'amplitude du mouvement avec le temps et le système fini par s'arrêter. C'est le phénomène d'***amortissement*** qui est la conséquence de l'existence des forces de frottements qui freinent le mouvement du système jusqu'à l'immobilisation. Le système perd son énergie sous l'effet des ces forces qui ne sont pas conservatives.

3.2 Force de frottement

Les forces de frottements peuvent avoir des origines diverses et leur dépendance avec les variables du mouvement peut être compliquée. Dans la suite on considère un type particulier de ces forces qui est le frottement visqueux qui à une forme simple. C'est le frottement qui entrave le mouvement d'un corps dans un fluide (gaz ou liquide). Lorsque la vitesse est suffisament faible, on obtient une force de résistance $\vec{f}$ linéairement proportionelle à la vitesse $\vec{v}$ et contraire au sens du mouvement :

$$\vec{f} = -\alpha\vec{v} \tag{3.3}$$

α est le ***coéfficient de frottement*** (une constante positive) et $\vec{v}$ est la vitesse du corps en mouvement par rapport au fluide amortisseur (c'est une vitesse relative).

3.3 Système amorti

Sur la figure (3.1) on représente un système masse-ressort éffectuant un mouvement oscillatoire dans un fluide visqueux. La position de la masse est repérée à partir de la position d'équilibre suivant la coordonnée x. La masse subit l'action de la gravitation et de la tension du ressort en plus de la force du frottement visqueux qui est toujours opposée au sens du mouvement. Si la vitesse de la masse est $\dot{x}$ la force de frottement sera $f = -\alpha\dot{x}$. Ce

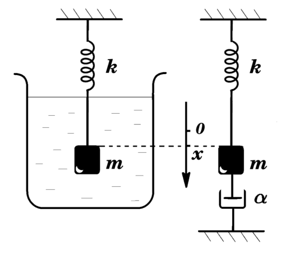


FIG. 3.1 – Système amorti par un frottement visqueux.

système est équivalent au système représenté sur la droite de la même figure dans lequel le liquide visqueux est remplacé par un amortisseur à frottement visqueux avec un coéfficient α qui produit la même force de frottement que le liquide visqueux. Cette force est $f = -\alpha\dot{x}$ et $\dot{x}$ est cette fois-ci la vitesse du piston de l'amortisseur qui effectue un mouvement de va-et-vient par rapport à la chemise qui contient un liquide visqueux. Cependant, dans ce cas, la vitesse du piston est la même que la vitesse de la masse m. Le bilan des forces selon le principe de la dynamique s'écrit :

$$-k(x + x_0) + mg - \alpha\dot{x} = m\ddot{x} \tag{3.4}$$

lorsque la masse est à l'équilibre la somme des forces doit être nulle :

$$-kx_0 + mg = 0 \tag{3.5}$$

cette relation permet de simplifier l'équation précédente qui devient :

$$-kx - \alpha\dot{x} = m\ddot{x} \tag{3.6}$$

on peut réécrire cette équation comme suit :

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{3.7}$$

qui est une équation différentielle linéaire du second ordre. Comparée à l'équation de l'oscillateur harmonique (équation (3.1)) Elle contient le terme $\frac{\alpha}{m}\dot{x}$ provenant de l'amortissement. Si on introduit les constantes $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ elle prend la forme :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{3.8}$$

c'est l'équation différentielle d'un système amorti par frottement visqueux. Plus généralement, pour un degré de liberté q elle s'écrit :

$$\ddot{q} + 2\lambda\,\dot{q} + \omega_0^2\,q = 0 \tag{3.9}$$

- λ est le facteur d'amortissement.
- ω_0 est la pulsation propre du système sans amortissement.

3.4 Equation horaire du mouvement amorti

On distingue trois cas de figure lors de la résolution de l'équation différentielle du mouvement amorti précédente selon le signe de l'expression $\lambda^2 - \omega_0^2$ pour obtenir trois régime différents :

1. $\lambda^2 - \omega_0^2 < 0$ régime faiblement amorti.
2. $\lambda^2 - \omega_0^2 = 0$ régime critique.
3. $\lambda^2 - \omega_0^2 > 0$ régime fortement amorti.

3.4.1 Régime faiblement amorti

Si la condition $\lambda^2 - \omega_0^2 < 0$ est satisfaite, on déduit que $\lambda < \omega_0$. Donc, tant que le facteur d'amortissement est inférieur à la pulsation propre du système on se retrouve dans le régime faiblement amorti. Dans cet intervalle, là solution de l'équation différentielle du mouvement prend la forme :

$$q(t) = A\,e^{-\lambda t}\,\cos(\omega t + \varphi) \tag{3.10}$$

tel que $\omega = (\omega_0^2 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}}$ alors que A et φ sont deux constantes d'intégration déterminées par les conditions initiales. Un exemple du graphe d'une telle solution est représenté sur la figure (3.2).

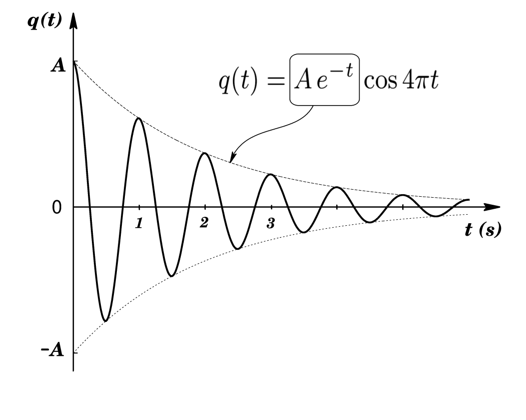


FIG. 3.2 – Exemple d'un mouvement faiblement amorti donné par une coordonnée $q(t)$ pour les valeurs particulières de la pulsation $\omega = 4\pi$ rad/s, du facteur d'amortissement $\lambda = 1$ s^{-1} et la constante $\varphi = 0$ rad.

La particularité importante de cette solution est que le système éffectue un mouvement oscillatoire gouverné par la fonction $\cos(\omega t + \varphi)$. Cependant, l'amplitude des oscillations n'est pas constante mais diminue exponentiellement avec le temps suivant la formule $A\,e^{-\lambda t}$. On a une forme sinusoïdale qui se répete dans le temps mais pas identiquement car l'amplitude change avec les temps. Ce mouvement est qualifié parfois de ***pseudo-périodique*** alors que ω et $T = \frac{2\pi}{\omega}$ sont la pseudo-pulsation et la pseudo-période respectivement. Comme on peut le constater sur l'exemple de la figure (3.2) la fonction $A\,e^{-\lambda t}$ qui donne l'amplitude du mouvement à chaque instant t représente une enveloppe pour le graphe de l'équation horaire $q(t)$.

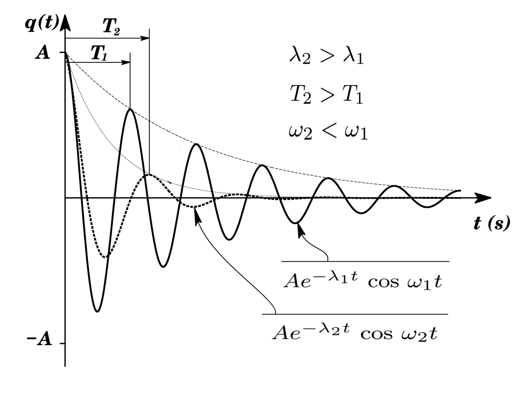


FIG. 3.3 – Illustration de l'effet de l'augmentation du facteur d'amortissement sur le mouvement en comparant deux mouvements du même système produits par deux facteur différents λ_2 et λ_1.

Nous remarquons que la pseudo-pulsation ω qui est donnée par $\omega = (\omega_0^2 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}}$ est toujours inférieur à ω_0 et par conséquent la pseudo-période T est toujours supérieure à T_0 qui est la la période propre du système harmonique non-amorti. Cela est ainsi car, si le système non-amorti effectue une oscillattion dans un temps T_0, il lui faudra plus de temps pour effectuer une oscillation si on introduit une force de frottement qui va ralentir le mouvement. Aussi, pour cette même raison, si pour une

force de frottement avec un facteur d'amortissement λ_1 on obtient une pseudo-période T_1, l'augmentation de la force de frottement avec $\lambda_2 > \lambda_1$ augmente la pseudo-période et donne $T_2 > T_1$. Cela est visible avec l'illustration sur la figure (3.3) permettant de comparer les mouvements avec deux facteurs d'amortissement différents. Sur la même figure en remarque aussi la diminution plus rapide de l'amplitude avec l'augmentation du facteur d'amortissement.

3.4.2 Régime critique

Dans le régime faiblement amorti, le système oscille avec une pulsation $\omega = (\omega_0^2 - \lambda^2)^{\frac{1}{2}}$ qui est inférieur à ω_0. En augmentant le frottement, cette pulsation diminue encore plus jusqu'au moment ou elle s'annule lorsque $\omega_0^2 - \lambda^2 = 0$. Cette relation est réalisée pour la valeur particlière du facteur d'amortissement $\lambda = \omega_0$ pour laquelle ***le système n'effectue plus de mouvement oscillatoire*** c'est le régime critique. Ecarté de l'équilibre puis relaché, le système revient vers la position d'équilibre sans oscillations. L'équation horaire du mouvement est dans ce cas donnée par :

$$q(t) = e^{-\lambda t}\,(A + B\,t) \tag{3.11}$$

A et B étant deux constantes déterminées par les conditions initiales du mouvement.

3.4.3 Régime fortement amorti

Si en augmente encore plus le facteur d'amortissement au-delà de la valeur critique on rentre dans le régime fortement amorti qui satisfait la condition $\lambda^2 - \omega_0^2 > 0$ corespondant à $\lambda > \omega_0$. Dans ce régime aussi, le système ne peut osciller et il revient directement vers l'équilibre. L'équation horaire du mouvement dans ce cas est de la forme :

$$q(t) = e^{-\lambda t}\,(A\,e^{-\omega t} + B\,e^{\omega t}) \tag{3.12}$$

A et B étant deux constantes déterminées par les conditions initiales du mouvement. Une comparaison entre les trois régimes est représentée sur la figure (3.4). Dans les trois régime le système est écarté de l'équilibre d'une grandeur A ensuite relaché sans vitesse initiale. On note qu'on n'obtient un mouvement oscillatoire que pour le régime pseudo-périodique. Dans les deux autres régimes, critique est fortement amorti, le système revient vers l'équilibre sans osciller. On note aussi que le retour vers l'équilibre s'effectue le plus rapidement dans le régime critique. Si en augmente le facteur d'amortissement, en rentrant dans le régime fortement amorti, le retour est toujours moins rapide que dans le régime critique.

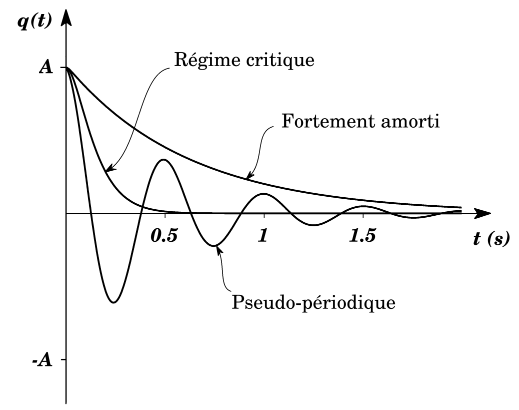


Fig. 3.4 – Comparaison des trois régimes. C'est seulement dans le régime faiblement amorti que le système peut osciller. Dans les deux autres rigmes, il revient directement vers l'équilibre sans osicllation. Le retour le plus rapide vers l'équilibre est obtenu pour le régime critique.

3.5 Dissipation de l'énergie

Un système amorti, à cause des forces de frottements, perd sont énergie mécanique et s'arrête avec le temps. Au contraire, un système conservatif comme l'oscillateur harmonique preserve son énergie est oscille indéfiniment. On peut suivre la perte de l'énergie lors de l'amortissement en partant de l'équation différentielle du mouvement pour le système masse-ressort en mouvement dans le liquide visqueux comme suit :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0 \;\Rightarrow\; m\ddot{x} + kx = -\alpha\dot{x} \tag{3.13}$$

d'un autre coté l'énergie totale du système est :

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \tag{3.14}$$

puisqu'on sait que cette énergie varie et n'est pas constante dans le temps, on peut suivre cette variation en calculant sa dérivée par rapport au temps :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = \dot{x}(m\ddot{x} + kx) \tag{3.15}$$

mais le terme entre parathèses $m\ddot{x} + kx$ est donné par l'équation (3.13). Il est égale à $-\alpha\dot{x}$. En remplaçant cette expression dans l'équation précédente, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\alpha\dot{x}^2 < 0 \tag{3.16}$$

cette expression est toujours négative. Elle montre que la dérivée de l'énergie par rapport au temps est toujours négative indiquant que l'énergie est en constante diminution confirmant qu'on a une dissipation de l'énergie.

3.6 Equation de Lagrange des systèmes amortis

On considère les frottements visqueux produits par un amortisseur de coéfficient de frottement α. Dans ce cas, si la position du piston par rapport à la chemise est suivie par une coordonnée x ; alors, la vitesse du piston par

rapport à la chemise est donnée par $\dot{x}$. De cette manière la force de frottement que subit le piston est donnée par $f = -\alpha\,\dot{x}$. Cette force de frottement peut être prise en comptes dans le formalisme de Lagrange en ajoutant un second membre à l'équation de la Lagrange comme suit :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q}.\vec{f} \tag{3.17}$$

q étant le degré de liberté du système et $\vec{r}$ étant le vecteur position du point d'application de la force. Dans notre cas, si on se restreint aux forces produites par un amortisseur avec un piston effectuant un mouvement de translation suivant une droite et dont la position est donnée par une coordonnée x, l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial x}{\partial q}.f \tag{3.18}$$

mais :

$$f = -\alpha\,\dot{x} = -\alpha\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\alpha\,\frac{\partial x}{\partial q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\alpha\,\frac{\partial x}{\partial q}\,\dot{q} \tag{3.19}$$

en remplaçant cette expression de la force de frottement dans l'expression précédente :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = -\alpha\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2\dot{q} \tag{3.20}$$

on peut mettre $\beta = \alpha\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2$ pour obtenir :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = -\beta\,\dot{q} \tag{3.21}$$

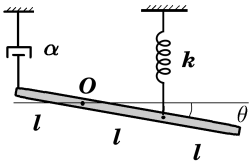
on peut aussi introduire la fonction de dissipation $\mathcal{D} = \frac{1}{2}\beta\,\dot{q}^2$ qui nous permet de réécrire l'équation de Lagrange :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}} \tag{3.22}$$

Exercices

Exercice – 11

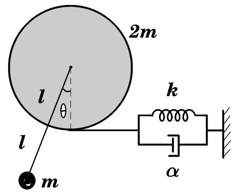
Dans le système ci-contre, la barre de masse m et de longueur $3l$ peut tourner autour de l'axe passant par O. On symbolise l'ensemble des frottements par un amortisseur à frottement visqueux de coéfficient α. A l'équilibre la tige est horizontale. On écarte la tige de la verticale d'un angle suffisament faible pour admettre que $\sin\theta \simeq \theta$ et $\tan\theta \simeq \theta$.



1. Trouver l'équation differentielle du mouvement en utilisant le principe fondamental de la dynamique pour les mouvements de rotation.
2. Quelle est la valeur que le coéfficient de frottement α ne doit pas dépasser pour avoir un mouvement oscillatoire. Calculer cette valeur si $m = 1$ kg et $k = 1$ N/m.
3. Supposant que α prend la valeur calculée dans la question précédente. Quelle est la nature du mouvement. Donner l'équation horaire de ce mouvement $\theta(t)$ en sachant qu'initialement $\theta(0) = 5^\circ$ et $\dot{\theta}(0) = 0^\circ/s$.

Exercice – 12

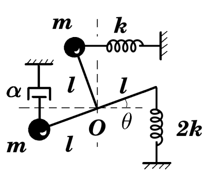
Le système çi-contre peut osciller autour de l'axe passant par le centre de la poulie. La tige est de masse négligeable. Les frottements sont symbolisés par un amortisseur à frottement visqueux de coéfficient α. A l'équilibre la tige est verticale. On relache le système aprés l'avoir écarté d'un angle θ suffisament petit pour admettre que $\tan\theta \simeq \theta$ et $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$.



1. Exprimer l'énergie potentielle U du système en fonction de θ. Trouver la condition d'équilibre. Démontrer que la déformation initiale du ressort x_0 est nulle et simplifier l'expression de U.
2. Donner l'expression de l'énergie cinétique T du système.
3. Donner l'expression du Lagrangien du système et déduire l'équation du mouvement.
4. Exprimer la condition qui permet de calculer la valeur maximale que le coefficient de frottement α ne doit pas dépasser pour que le système puisse osciller. Calculer cette valeur si on suppose que $k = 4$ N/m, $m = 0.1$ kg, $l = 0.5$ m et $g = 10$ m/s^2.
5. Supposant que $\alpha = 2$ N.s/m. Quel est la nature du mouvement. Donner son équation horaire on sachant qu'initialement $\theta(0) = 0^\circ$ et $\dot{\theta}(0) = \frac{\sqrt{12}}{10} rad/s$

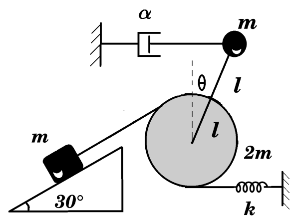
Exercice – 13

Dans le sytème suivant, La tige et les ressorts sont de masse négligeable. La tige peut tourner autour de l'axe passant par O. On considère que les masses sont ponctuelles. A l'équilibre $\theta = 0$. L'amortisseur à frottement visqueux remplace les forces de frottements. On abandonne le système après l'avoir écarté de la position d'équilibre d'un angle θ suffisament petit pour admettre que $\sin\theta \simeq \theta$.Trouver l'équation du mouvement en fonction de θ en utilisant le formalisme de Lagrange.



Exercice – 14

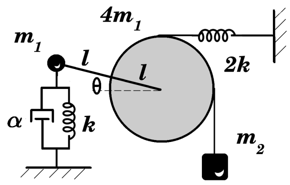
Dans ce système, on suppose que la poulie peut tourner autour de son centre sans frottement. Le fil est de masse négligeable et ne glisse pas sur la poulie. Le ressort est aussi de masse négligeable. A l'équilibre, la tige est verticale. La poulie est écartée de l'équilibre d'un petit angle θ puis relachée. On considère que θ est suffisament petit pour admettre que $\sin\theta \simeq \theta$ et $\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$.



1. Evaluer l'énergie potentielle U du système en fonction de θ.
2. Ecrire la condition d'équilibre à partir de U. Déduire l'allogement initial x_0 du ressort et simpilifier l'expression de U.
3. Quelle est la condition à satisfaire pour que l'équilibre précédent soit stable.
4. Trouver l'équation du mouvement en utilisant l'équation de Lagrange.
5. Déduire la condition nécessaire pour avoir des oscillations.

Exercice – 15

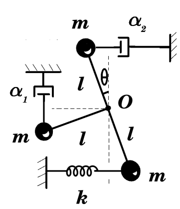
Dans ce système, on suppose que la poulie peut tourner autour de son centre sans frottement. Le fil est de masse négligeable et ne glisse pas sur la poulie. A l'équilibre, la tige est horizontale et le ressort horizontal n'est pas déformé. La poulie est écartée de l'équilibre d'un petit angle θ puis relachée. On considère que θ est suffisament petit pour admettre que $\sin\theta \simeq \theta$.



1. Exprimer l'énergie potentielle U du système en fonction de θ.
2. Ecrire la condition d'équilibre à partir de U. Déduire l'allogement initial x_0 du ressort vertical puis simpilifier l'expression de U.
3. Quelle est la valeur que doit avoir m_2 en fonction de m_1 pour que x_0 soit nulle.
4. On suppose que $m_2 = 2m_1 = m$. Trouver l'équation du mouvement en utilisant l'équation de Lagrange.

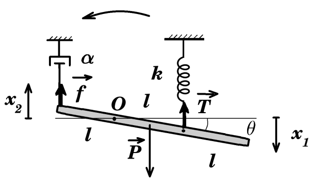
Exercice – 16

Dans le système ci-contre, les deux tiges de masses négligeables sont perpendiculaires. A l'équilibre, la tige de longeur l est horizontale . On relache la barre après l'avoir écarté de la position d'équilibre d'un angle θ suffisament petit pour admettre que $\sin\theta \simeq \theta$ et $\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$. Trouver l'équation du mouvement en utilisant le formalisme de Lagrange.



Solutions

Solution de l'exercice 11



1 Pour un corps en rotation, le principe fondamental de la dynamique prend la forme particulière suivante :

$$\sum \mathcal{M} = I\,\ddot{\theta}$$

La coordonnée x_1 nous donne l'allongement du ressort à partir de la position d'équilibre. La coordonnée x_2 nous donne la position du point d'attache du piston de l'amortisseur à la tige. On tenant compte de la direction positive choisie pour les rotations et l'approximation des faibles angles en travaillant avec les forces ($\cos\theta \simeq 1$), le bilan des moments[1] s'écrit[2] :

$$k(x_1+x_0)l - \frac{1}{2}mg.l + \alpha\dot{x}_2 l = I\,\ddot{\theta}$$

A l'équilibre, on écrit la condition d'équilibre des moments[3] :

$$\sum \mathcal{M} = 0 \;\;\Rightarrow\;\; -\frac{1}{2}mg.l + 2kx_0 l = 0$$

qui nous permet de simplifier l'expression de l'équation du mouvement, en tenant compte du fait que $x_2 = x_1 \simeq -l\theta$, pour obtenir :

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha l^2}{I}\dot{\theta} + \frac{kl^2}{I}\,\theta = 0$$

le moment d'inertie de la barre par rapport à la axe passant par le centre de masse est $I_{cm} = \frac{1}{12}m(3l)^2 = \frac{3}{4}ml^2$. On peut utiliser la théorème des axes parallèles pour avoir le moment d'inertie par rapport à l'axe passant par le point O :

$$I_O = I_{cm} + m\left(\frac{1}{2}l\right)^2 = \frac{3}{4}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = ml^2$$

donc l'équation du mouvement devient :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \frac{k}{m}\,\theta = 0}$$

2 pour avoir un mouvement oscillatoire il faut être dans le régime pseudo-périodique $\lambda^2 - \omega_0^2 < 0$, donc :

$$\left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} < 0 \;\;\Rightarrow\;\; \boxed{\alpha < 2\sqrt{km}} \;\;\Rightarrow\;\; \boxed{\alpha < 2\ \text{N.s/m}}$$

3 Lorsque $\alpha = 2$ N.s/m on est dans le régime critique. l'équation horaire du mouvement en sachant que $\lambda = \dfrac{\alpha}{2m} = 1\,\text{s}^{-1}$ est de la forme :

$$\theta(t) = e^{-t}\,(A_1 + A_2 t)$$

qui a deux constantes A_1 et A_2 qu'on doit déterminer à partir des deux conditions initiales :

$$\theta(0) = 5^\circ \;\;\Rightarrow\;\; \boxed{A_1 = 5^\circ}$$

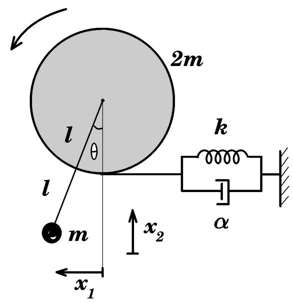
la deuxième conditions initiales nous donne la vitesse angulaire à $t = 0$, en sachant que $\dot{\theta} = -e^{-t}(5+A_2 t) + A_2 e^{-t}$:

$$\dot{\theta}(0) = 0\,^\circ/s \;\;\Rightarrow\;\; -5 + A_2 = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \boxed{A_2 = 5\,^\circ/s}$$

donc l'équation du mouvement s'écrit :

$$\theta(t) = e^{-t}\,(5+5t)\ \ (^\circ)$$

Solution de l'exercice 12



$$\text{énergie potentielle} \Rightarrow \begin{cases} \text{ressort} \Rightarrow \text{l'axe } Ox_1 \\ \text{gravitation} \Rightarrow \text{l'axe } Ox_2 \end{cases}$$

1 L'expression de l'énergie potentielle prend alors la forme[4] :

$$U = \frac{1}{2}k(x_1+x_0)^2 + mgx_2$$

mais $x_1 \simeq -l\theta$ et $x_2 \simeq l\theta^2$ donc :

$$U = \left(\frac{1}{2}kl + mg\right)l\theta^2 - klx_0\,\theta + \frac{1}{2}kx_0^2$$

A l'équilibre la dérivée de l'énergie potentielle s'annule $\dfrac{\partial U}{\partial\theta} = 0$, donc :

$$\frac{\partial U}{\partial\theta} = (kl + 2mg)\,l\theta - klx_0 = 0$$

mais aussi $\theta = 0$, on obtient :

$$-\,klx_0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_0 = 0$$

ce qui permet de simplifier l'énergie potentielle :

$$U = \left(\frac{1}{2}kl + mg\right)l\theta^2$$

[1] sans considérer l'action de l'axe sur la tige qui a un moment nul.

[2] Notons que la force du frottement sur le dessin correspond à une vitesse $\dot{x}_2$ négative mais la seconde possibilité avec $\dot{x}_2$ positive donne la même formule qui est donc valable pour les deux cas.

[3] l'autre condition d'équilibre qui est celle des forces ne nous interesse pas.

[4] On peut voir que l'allongement initial du ressort doit être nul à l'équilibre pour que la tige reste vertical. Cependant, on pourra démontrer ce fait en supposant que l'allongement initial est x_0 et démontrer par la suite que x_0 doit être nul.

$\boxed{2}$ l'énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}2ml^2 + m(2l)^2\right)\dot{\theta}^2 = \boxed{\frac{5}{2}ml^2\dot{\theta}^2}$$

$\boxed{3}$ Le Lagrangien :

$$L = T - U = \frac{5}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \left(\frac{1}{2}kl + mg\right) l\theta^2$$

L'équation de Lagrange d'un mouvement amorti s'écrit avec un second membre $-\beta\dot{q}$, dans notre cas $-\beta\dot{\theta}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = -\beta\dot{\theta} \quad \text{avec} \quad \beta = \alpha\left(\frac{\partial x_1}{\partial\theta}\right)^2$$

la coordonnée x_1 est la coordonnée pour suivre le mouvement du piston de l'amortisseur qui est celle pour suivre le mouvement du bout du ressort aussi. Mais puisque $x_1 \simeq -l\theta$ on obient $\left(\frac{\partial x_1}{\partial\theta}\right) \simeq -l$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 5ml^2\ddot{\theta} + (kl^2 + 2mgl)\,\theta = -\alpha l^2\dot{\theta}$$

donc l'équation du mouvement est :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{5m}\dot{\theta} + \frac{(kl + 2mg)}{5ml}\,\theta = 0}$$

cette équation est de la forme :

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0 \quad \text{tel que} \quad \lambda = \frac{\alpha}{10m} \text{ et } \omega_0^2 = \frac{(kl + 2mg)}{5ml}$$

$\boxed{4}$ pour avoir un mouvement oscillatoire il faut être dans le régime pseudo-périodique $\lambda^2 - \omega_0^2 < 0$, donc :

$$\left(\frac{\alpha}{10m}\right)^2 - \frac{(kl + 2mg)}{5ml} < 0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{\alpha < \sqrt{20m\left(k + \frac{2mg}{l}\right)}}$$

l'application numérique nous donne la valeur maximale α_{max} :

$$\boxed{\alpha_{max} = \sqrt{20 \times 0.1\left(4 + \frac{2 \times 0.1 \times 10}{0.5}\right)} = 4 \text{ N.s/m}}$$

$\boxed{5}$ $\alpha = 2 < 4\,$N.s/m on est dans le régime pseudo-périodique et l'équation du mouvement doit correspondre à :

$$\theta(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}t + \phi)$$
$$\Rightarrow \theta(t) = Ae^{-2t}\cos(\sqrt{12}t + \phi)$$

les deux constantes A et ϕ peuvent être déterminées par les conditions initales :

$$\theta(0) = 0 \Rightarrow A\cos\phi = 0 \Rightarrow \cos\phi = 0 \Rightarrow \phi = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

la deuxième condition nous donne la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ à l'instant $t = 0$. On doit trouver l'expression de cette vitesse angulaire en dérivant[5] $\theta(t)$:

$$\dot{\theta}(t) = -2Ae^{-2t}\cos(\sqrt{12}t + \phi) - A\sqrt{12}e^{-2t}\sin(\sqrt{12}t + \phi)$$

$$\dot{\theta}(0) = -2A\cos\phi - A\sqrt{12}\sin\phi = \frac{\sqrt{12}}{10}$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow -A\sqrt{12} = \frac{\sqrt{12}}{10} \Rightarrow A = -0.1 \text{ rad}$$

$$\phi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow A\sqrt{12} = \frac{\sqrt{12}}{10} \Rightarrow A = 0.1 \text{ rad}$$

On obtient apparament deux possibilités :

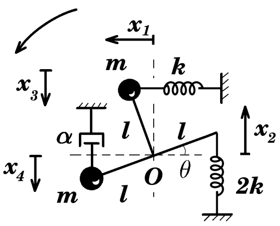
$$\theta(t) = -0.1\,e^{-2t}\cos(\sqrt{12}t + \frac{\pi}{2})$$

$$\theta(t) = 0.1\,e^{-2t}\cos(\sqrt{12}t - \frac{\pi}{2})$$

mais ces deux possiblités constituent une seule solution si on sais que $-\cos\alpha = \cos(\alpha \pm \pi)$. On obtient finalement l'équation du mouvement :

$$\boxed{\theta(t) = 0.1\,e^{-2t}\cos(\sqrt{12}t - \frac{\pi}{2})}\text{(rad)}$$

Solution de l'exercice 13



On définit les coordonnées x_i à partir de la position d'équilibre comme indiqué sur la figure. L'énergie potentielle prend la forme (a et b sont les déformations initiales des ressorts) :

$$U = \frac{1}{2}k(x_1 + a)^2 + \frac{1}{2}2k(x_2 + b)^2 - mgx_3 - mgx_4$$

mais les coordonnées x_i dépendent de θ comme suit : $x_1 = x_2 = x_4 = l\theta$ et $x_3 = \frac{1}{2}l\theta^2$ en remplaçant l'expression de ces coordonnées dans U :

$$U = \frac{1}{2}k(a + l\theta)^2 + k(b + l\theta)^2 - \frac{1}{2}mgl\theta^2 - mgl\theta$$

aprés réarrangement :

$$\boxed{U = \left(\frac{3}{2}kl - \frac{1}{2}mg\right) l\theta^2 + (k(2b + a) - mg)\,l\,\theta + k\left(\frac{1}{2}a^2 + b^2\right)}$$

A l'équilibre $\frac{\partial U}{\partial\theta} = 0$:

$$\frac{\partial U}{\partial\theta} = (3kl - mg)\,l\theta + (k(2b + a) - mg)l = 0$$

mais aussi, à l'équilibre $\theta = 0$, donc la condition d'équilibre devient :

$$k(2b + a) - mg = 0$$

ce qui nous permet de simplifier l'expression de U :

$$\boxed{U = \left(\frac{3}{2}kl - \frac{1}{2}mg\right) l\,\theta^2 + k\left(\frac{1}{2}a^2 + b^2\right)}$$

l'énergie cinétique du système en rotation est :

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(ml^2 + ml^2\right)\dot{\theta}^2 \Rightarrow \boxed{T = ml^2\dot{\theta}^2}$$

[5] Notons que pour dériver correctement, il est impératif que l'argument de la fonction cosinus soit exprimé en radian et pas en degrés.

le Lagrangien du système est :

$$L = T - U = ml^2\dot\theta^2 - \left(\frac{3}{2}kl - \frac{1}{2}mg\right) l\,\theta^2 - k\left(\frac{1}{2}a^2 + b^2\right)$$

$\boxed{5}$ L'équation de Lagrange pour le système amorti est alors :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 2ml^2\ddot\theta + \left(3kl^2 - mgl\right)\theta = -\beta\dot\theta$$

mais $\beta = \alpha\left(\frac{\partial x_4}{\partial\theta}\right)^2 = \alpha l^2$ donc l'équation du mouvement devient :

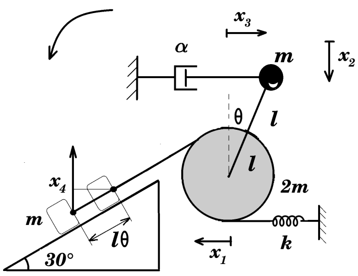
$$2ml^2\ddot\theta + \left(3kl^2 - mgl\right)\theta = \alpha l^2\dot\theta$$

ou aprés simplification :

$$\boxed{\ddot\theta + \frac{\alpha}{2m}\dot\theta + \frac{(3kl - mg)}{2ml}\,\theta = 0}$$

Solution de l'exercice 14

$\boxed{1}$ l'énergie potentielle du système en fonction des axes définis à partir de la position déquilibre :



$$U = \frac{1}{2}k(x_1 + x_0)^2 - mgx_2 + mgx_4$$

mais les trois coordonnées x_1, x_2 et x_4 dépendent de θ comme suit :

$$\begin{aligned} x_1 &= -l\theta \\ x_2 &= 2l(1-\cos\theta) \simeq l\theta^2 \\ x_4 &= -l\theta\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}l\theta \end{aligned}$$

sur la figure on représente la masse sur le plan incliné en bas à l'équilibre. En écartant le système de l'équilibre d'un angle θ la masse se déplace vers le haut. En remplaçant l'expression de ces coordonnées dans U :

$$U = \frac{1}{2}k(x_0 - l\theta)^2 - mgl\theta^2 - \frac{1}{2}mgl\theta$$

aprés réarrangement :

$$\boxed{U = \left(\frac{1}{2}kl^2 - mgl\right)\theta^2 + \left(-\frac{1}{2}mg - kx_0\right) l\,\theta + \frac{1}{2}kx_0^2}$$

$\boxed{2}$ A l'équilibre $\frac{\partial U}{\partial\theta} = 0$:

$$\left(kl^2 - 2mgl\right)\theta + \left(-\frac{1}{2}mg - kx_0\right) l = 0$$

mais aussi, à l'équilibre $\theta = 0$, donc la condition d'équilibre devient :

$$\boxed{-\frac{1}{2}mg - kx_0 = 0} \Rightarrow \boxed{x_0 = -\frac{2mg}{k}}$$

puisque $x_0 = \Delta l = l - l_0 < 0$ cela indique que le ressort doit être comprimé à l'équilibre pour que la tige reste verticale. On peut simplifier l'expression de U :

$$\boxed{U = \left(\frac{1}{2}kl^2 - mgl\right)\theta^2 + \frac{1}{2}kx_0^2}$$

$\boxed{3}$ Pour que l'équilibre précédent soit stable. la deuxième dérivée doit être positive :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} = kl^2 - 2mgl > 0 \Rightarrow \boxed{kl - 2mg > 0}$$

$\boxed{4}$ L'énergie cinétique est la somme de l'énergie cinétique de la poulie et la tige avec la masse ponctuelle plus l'énergie de translation de la masse attachée au fil :

$$T = \frac{1}{2}I\dot\theta^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

v étant la vitesse de la masse sur le plan incliné. Le module de cette vitesse est reliée à la vitesse angulaire $\dot\theta$ par $|v| = |l\dot\theta|$ donc :

$$T = \frac{1}{2}I\dot\theta^2 + \frac{1}{2}m\left(l\dot\theta\right)^2$$

mais $I = \frac{1}{2}(2m)l^2 + m(2l)^2 = 5ml^2$, donc : $\boxed{T = 3ml^2\dot\theta^2}$. On déduit le Lagrangien :

$$\boxed{L = T - U = 3ml^2\dot\theta^2 - \left(\frac{1}{2}kl^2 - mgl\right)\theta^2 - \frac{1}{2}kx_0^2}$$

le second membre de l'équation de Lagrange : $\beta = \alpha\left(\frac{\partial x_3}{\partial\theta}\right)^2 = \alpha l^2$; mais $x_3 = -2l\sin\theta \simeq -2l\theta$, donc $\frac{\partial x_3}{\partial\theta} \simeq -2l$. Finalement $\beta = 4\,\alpha l^2$ et l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 6ml^2\ddot\theta + \left(kl^2 - 2mgl\right)\theta = -4\,\alpha l^2\dot\theta$$

aprés simplification :

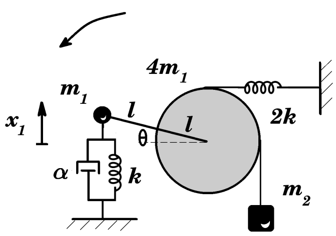
$$\boxed{\ddot\theta + \frac{2\alpha}{3m}\dot\theta + \frac{(kl - 2mg)}{6ml}\,\theta = 0}$$

$\boxed{5}$ pour avoir un mouvement oscillatoire il faut être dans le régime pseudo-périodique $\lambda^2 - \omega_0^2 < 0$, donc :

$$\boxed{\left(\frac{2\alpha}{6m}\right)^2 - \frac{(kl - 2mg)}{6ml} < 0}$$

Solution de l'exercice 15

Le système est le même que celui traité dans la série précédente sauf qu'on a ajouté un amortisseur. L'équation de Lagrange obtenue reste la même sauf que le second membre égale $-\beta\dot\theta$. Dans ce système $\beta = \alpha\left(\frac{\partial x_1}{\partial\theta}\right)^2 = \alpha\,(-2l)^2 = 4\alpha l^2$, donc l'équation de Lagrange s'écrit :

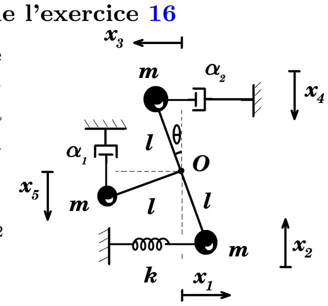


$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 4ml^2\ddot\theta + 6kl^2\,\theta = -4\,\alpha l^2\dot\theta$$

Finalement, on obtient :

$$\boxed{\ddot\theta + \frac{\alpha}{m}\dot\theta + \frac{3k}{2m}\,\theta = 0}$$

Solution de l'exercice 16



L'énergie potentielle en fonction des coordonnées x_i définies à partir de la position d'équilibre :

$$U = \frac{1}{2}k(x_1 + x_0)^2 + mgx_2$$
$$-mgx_5 - mgx_4$$

mais les coordonnées x_i dépendent de θ comme suit :

$$x_1 = x_3 = x_5 \simeq l\theta$$
$$x_2 = x_4 \simeq \frac{1}{2}l\theta^2$$

en remplaçant l'expression de ces coordonnées dans U :

$$U = \frac{1}{2}k(l\theta + x_0)^2 - mgl\theta - \frac{1}{2}mgl\theta^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2$$

aprés réarrangement :

$$\boxed{U = \frac{1}{2}kl^2\theta^2 + (kx_0 - mg)\, l\, \theta + \frac{1}{2}kx_0^2}$$

la condition d'équilibre permet de simplifier U :

$$\boxed{U = \frac{1}{2}kl^2\theta^2 + \frac{1}{2}kx_0^2}$$

L'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{3}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

le Lagrangien du sytème :

$$L = T - U = \frac{3}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kl^2\theta^2 - \frac{1}{2}kx_0^2$$

L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 3ml^2\ddot{\theta} + kl^2\,\theta = -\beta_1\dot{\theta} - \beta_2\dot{\theta}$$

mais :

$$\beta_1 = \alpha_1\left(\frac{\partial x_5}{\partial \theta}\right)^2 = \alpha_1 l^2$$
$$\beta_2 = \alpha_2\left(\frac{\partial x_3}{\partial \theta}\right)^2 = \alpha_2 l^2$$

donc l'équation du mouvement s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 3ml^2\ddot{\theta} + kl^2\,\theta = -\alpha_1 l^2\dot{\theta} - \alpha_2 l^2\dot{\theta}$$

qu'on peut réécrire comme :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{3m}\dot{\theta} + \frac{k}{3m}\,\theta = 0}$$

Chapitre 4

Systèmes linéaires forcés à un degré de liberté

Sommaire

4.1 Introduction

Jusqu'à présent on a considéré les oscillateurs libres qui ne sont soumis à aucune force d'excitation. On a aussi vu l'effet d'un type bien particulier des forces de frottement qui est le frottement visqueux qui dépend linéairement de la vitesse. Dans ce qui suit nous allons voir l'effet de l'application d'une force d'excitation périodique sur les systèmes oscillatoires harmoniques.

4.2 Equation différentielle du mouvement

Nous allons voir l'effet de la plus simple forme des forces périodiques qui est la forme sinusoïdale sur le système masse-ressort-amortisseur reproduit sur la figure (4.1). La force $\vec{F}$ est une force verticale et sinusoïdale qui agit sur la masse m. Suivant cette verticale, la valeur de la force est donnée par $F = F_0 \cos\omega t$ qui est une grandeur algébrique. Elle peut être positive comme elle peut être négative. En choisissant le sens positif vers le bas comme indiqué sur la figure, on voit que la force est orientée vers le bas lorsque $F > 0$ (i.e $\cos\omega t > 0$) et orientée vers le haut lorsque $F < 0$ (i.e $\cos\omega t < 0$). La masse est aussi soumise à son poid et à la force de tension du ressort. Le bilan des forces s'écrit :

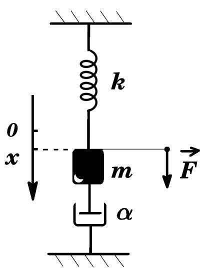


FIG. 4.1 – Système amorti forcé par une force $\vec{F}$.

$$-k(x + x_0) + mg - \alpha\dot{x} + F = m\ddot{x} \tag{4.1}$$

lorsque la masse est à l'équilibre la somme des forces doit être nulle :

$$-kx_0 + mg = 0 \tag{4.2}$$

cette relation permet de simplifier l'équation précédente qui devient :

$$-kx - \alpha\dot{x} + F = m\ddot{x} \tag{4.3}$$

on peut réécrire cette équation comme suit :

$$m\,\ddot{x} + \alpha\,\dot{x} + k\,x = F_0\,\cos\omega t \tag{4.4}$$

ou encore :

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \tag{4.5}$$

qui est de la forme générale :

$$\ddot{x} + 2\lambda\,\dot{x} + \omega_0^2 x = b\,\cos\omega t \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} \lambda = \frac{\alpha}{2m} \\ \omega_0^2 = \frac{k}{m} \\ b = \frac{F_0}{m} \end{cases} \tag{4.6}$$

dans la suite nous allons nous interessé à résoudre cette équation et étudier la caractéristiques de la solutions.

4.3 Résolution de l'équation différentielle du mouvement

La solution de l'équation différentielle précédente est la superposition de deux solutions. Une solution permanente $x_p(t)$ et une solution transitoire $x_T(t)$:

$$x(t) = x_p(t) + x_T(t) \tag{4.7}$$

la solution transitoire $x_p(t)$ est la solution de l'équation sans le second memebre $b\cos\omega t$. Elle correspond à la solution de l'équation du système amorti dont la forme dépend de l'expression $\lambda^2-\omega_0^2$. Cependant, dans les trois cas, cette solution tend vers zéro avec le temps ce qui explique qu'on l'appel solution transitoire et il reste la solution permanente.

On tente de chercher la solution permanente sous la forme sinusoïdale suivante :

$$x_p(t) = a\,\cos(\omega t+\Phi) \tag{4.8}$$

pour cela, on va utiliser la notation complexe :

$$x_p(t) = a\,\cos(\omega t+\Phi) \quad\longleftrightarrow\quad X = A\,e^{j\omega t} \tag{4.9}$$

$$b\,\cos\omega t \quad\longleftrightarrow\quad b\;e^{j\omega t} \tag{4.10}$$

en remplaçant $X = A\,e^{j\omega t}$ et $b\;e^{j\omega t}$ dans l'équation différentielle (4.6), on obtient :

$$\left(\omega_0^2-\omega_0^2+j2\lambda\omega\right)A = b \Rightarrow A = \frac{b}{\omega_0^2-\omega^2+j2\lambda\omega}$$

le dénominateur est un nombre complexe qu'on peut écrire sous forme polaire :

$$\omega_0^2-\omega^2+j\,2\lambda\omega = \left(\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\,(\lambda\omega)^2\right)^{\frac{1}{2}}\;e^{j\varphi}$$

tel que $\varphi = \arctan\dfrac{2\lambda\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$. Donc la solution X s'écrit :

$$X = \frac{b}{\left((\omega_0^2-\omega^2)^2+4\,(\lambda\omega)^2\right)^{\frac{1}{2}}}\;e^{j(\omega t-\varphi)}$$

la partie réelle de X est la solution permanente recherchée :

$$x_p(t) = Re(X) = a\cos(\omega t-\varphi)\begin{cases} a = \frac{b}{\left((\omega_0^2-\omega^2)^2+4(\lambda\omega)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \\ \varphi = \arctan\frac{2\lambda\omega}{\omega_0^2-\omega^2} = -\Phi \end{cases} \tag{4.11}$$

on déduit que le système admet une solution permanente sinusoïdale qui a la même fréquence que la force appliquée, une amplitude a et une phase Φ données par l'équation précédentes. Donc le système commence par un mouvement composé de deux mouvements qui sont un mouvement sinusoïdal et un mouvement amorti (voir la figure (4.2)). Cette phase s'appel le régime transitoire. Avec le temps, la solution transitoire devient de plus en plus imperceptible et tend vers zéro, il ne reste plus que la solution permanente. C'est la phase du régime permanent. Le système fini toujours par osciller avec la fréquence imposée par la force sinusoïdale.

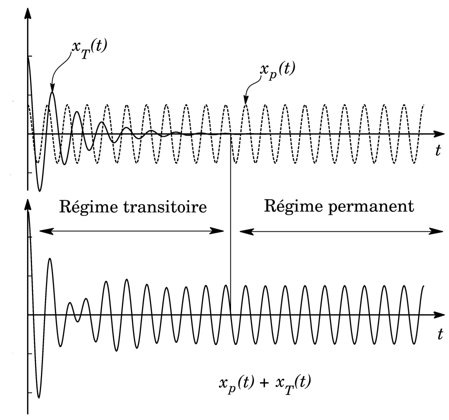


FIG. 4.2 – Le système forcé passe par un régime transitoire dans lequel l'effet de la solution transitoire est visible. A partir du moment ou son effet devient négligeable le système rentre dans le régime permanent.

4.4 Phénomène de Résonance

On a vu, qu'avec le temps, le système forcé fini par osciller avec la fréquence de la force imposée avec une amplitude qui dépend de ω comme suit :

$$a(\omega) = \frac{b}{\left((\omega_0^2-\omega^2)^2+4\,(\lambda\omega)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{4.12}$$

cette amplitude dépend de plusieurs grandeurs parmi lesquelles on retrouve la pulsation de la force imposée ω. On peut voir que si cette pulsation devient très grande (tend vers l'infini) ; l'amplitude du mouvement tend vers zéro. Ce comportement s'explique par le fait que la force change de signe si rapidement que la masse, à cause de son inertie, n'a plus le temps pour se mettre en mouvement (perceptible) dans le sens de la force avant que celle-ci ne change de signe.

Pour étudier les variations de l'amplitude par rapport à ω on calcul sa dérivée :

$$\frac{\partial a}{\partial\omega} = b\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\left(2(\omega_0^2-\omega^2)(-2\omega)+8\lambda^2\omega\right)}{\left((\omega_0^2-\omega^2)^2+4\,(\lambda\omega)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{4.13}$$

qu'on peut simplifier comme :

$$\frac{\partial a}{\partial\omega} = \frac{2b\,\omega\left(\omega_0^2-\omega^2-2\lambda^2\right)}{\left((\omega_0^2-\omega^2)^2+4\,(\lambda\omega)^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{4.14}$$

on constate que cette dérivée s'annule lorsque :

$$2b\,\omega\left(\omega_0^2-\omega^2-2\lambda^2\right) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases}\omega = 0 \\ \omega_0^2-\omega^2-2\lambda^2 = 0\end{cases} \tag{4.15}$$

si $\omega_0^2-2\lambda^2 > 0$, la deuxième équation admet la solution :

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2-2\lambda^2} \tag{4.16}$$

la dérivée est positive lorsque :

$$\omega_0^2-\omega^2-2\lambda^2 > 0 \;\Rightarrow\; \omega < \omega_R \tag{4.17}$$

et négative lorsque :

$$\omega_0^2-\omega^2-2\lambda^2 < 0 \;\Rightarrow\; \omega > \omega_R \tag{4.18}$$

donc la dérivée est positive entre $\omega = 0$ et $\omega = \omega_R$, s'annule pour ces deux valeurs et devient négative après $\omega = \omega_R$. On déduit que $\omega = 0$ est un minimum ensuite l'amplitude augmente pour atteindre un maximum pour $\omega = \omega_R$ et diminue pour tendre vers zéro à l'infini. Le graphe de cette fonction est représenté sur la figure (4.3).

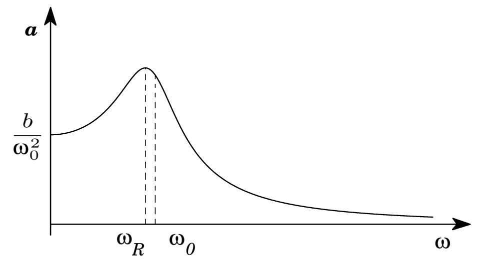


FIG. 4.3 – Dépendance de l'amplitude de vibration a dans le régime permanent en fonction de la pulsation ω de la force d'excitation.

On constante que le système fini par suivre les oscillations de la force appliquée dans le régime permanent ; mais il existe une pulsation particulière et unique au système qui donne des oscillations avec une amplitude maximale. Toutes autre fréquence donnerais une amplitude inférieure. On dit que le système est en résonance avec la force d'excitation et cette pulsation particulière s'appel pulsation de résonance ω_R qui est donnée par l'expression (4.16). En remplaçant la valeur de cette pulsation $\omega = \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$ dans l'expression de l'amplitude (4.12) on obtient l'amplitude maximale donnée par :

$$a_{max} = \frac{b}{2\lambda\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \tag{4.19}$$

on remarque que cette amplitude maximale est d'autant plus élevée que le facteur d'amortissement λ est faible. A la limite, si ce facteur s'annule, c'est à dire qu'on élimine tout frottement, l'amplitude maximale devient infinie ce qui est évidemment destructeur pour le système. Ce résultat très important nous permet de voir qu'il est possible de faire osciller un système oscillatoire à une amplitude très élevée même en utilisant une force sinusoïdale de faible intensité. Il suffit juste que cette force soit cadencée à la bonne fréquence qui est la fréquence de résonance que le système préfère.

On remarque que la fréquence de résonance est toujours inférieure à la fréquence propre du système mais, lorsque le facteur d'amortissement devient nul, elle devient égale à la fréquence propre du système. On rappel aussi que pour avoir le phénomène de résonance la condition $\omega_0^2 - 2\lambda^2 > 0$ doit être satisfaite sinon l'équation (4.15) ne peut avoir une solution réelle. donc :

$$\omega_0^2 - 2\lambda^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \tag{4.20}$$

les valeurs de λ qui vérifient cette inégalité sont dans le régime faiblement amorti. Si le facteur d'amortissement dépasse la valeur $\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ on n'obtient plus de résonance et la dérivée de l'amplitude en fonction de la pulsation devient négative quelque soit $\omega > 0$. Donc, la fonction $a(\omega)$ devient strictement décroissantes à partir du maximum correspondant à $\omega = 0$.

4.5 Formalisme de Lagrange

Un système avec un degré de liberté q soumis à une force $\vec{F}$ appliquée au point $\vec{r}$ doit satisfaire l'équation de Lagrange suivante :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q}.\vec{F} \tag{4.21}$$

cependant, le second membre de cette équation peut se simplifier dans deux cas particuliers :

1. $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}.\vec{F} = \pm\frac{\partial x}{\partial q}.F$ lorsque la partie du système qui subit la force a un mouvement réctiligne de coordonnée x et la force reste parallèle à cet axe. On a le signe (+) lorsque la force et la coordonnée x ont le même sens positif et le signe (-) lorqu'ils sont opposés.
2. $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}.\vec{F} = \frac{\partial \phi}{\partial q}\mathcal{M}$ lorsque le point d'application de la force effectue un mouvement circulaire autour d'un axe fixe (Δ) suivant une coordonnée φ. $\mathcal{M}$ est le moment de la force $\vec{F}$ par rapport à (Δ).

4.6 Analogie électromécanique

Considérons le circuit RLC représenté sur la figure (4.4). Il est soumis à la tension $u = u_0 \cos\omega t$. On souhaite trouver le courant i qui parcours ce circuit. Pour cela on va appliquer la loi des mailles sur l'unique maille du circuit qui nous donne :

$$R\,i + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = u \tag{4.22}$$

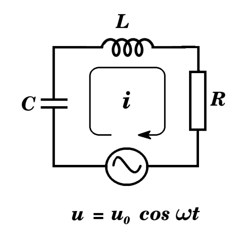


FIG. 4.4 – Circuit RLC sous tension sinusoïdale.

Cependant, on sait que $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dot{q}$ donc $\frac{di}{dt} = \ddot{q}$. En remplaçant ces grandeurs dans l'équation précédente on trouve l'équation qui suit et juste après, pour la comparaison, on écrit aussi l'équation (4.4) obtenue pour le système mécanique forcé masse-ressort-amortisseur représenté sur la figure (4.1) :

$$L\,\ddot{q} + R\,\dot{q} + \frac{1}{C}\,q = u_0\,\cos\omega t \tag{4.23}$$

$$m\,\ddot{x} + \alpha\,\dot{x} + k\,x = F_0\,\cos\omega t \tag{4.24}$$

les deux équations sont parfaitement semblables. On peut établir les correspondances suivantes :

$$x \leftrightarrow q \qquad k \leftrightarrow \frac{1}{C} \tag{4.25}$$

$$\dot{x} \leftrightarrow \dot{q} \qquad \alpha \leftrightarrow R \tag{4.26}$$

$$\ddot{x} \leftrightarrow \ddot{q} \qquad m \leftrightarrow L \tag{4.27}$$

On rappel que l'équation (4.22) peut être simplifier en utilisant la notion des impédances qui sont des nombres complexes (revoir le premier chapitre). En utilisant les impédances complexes R, $jl\omega$ et $\frac{1}{jC\omega}$ l'équation précédente (4.22) qui une équation différentielle devient une simple équation algébrique comme suit :

$$R\,I + jL\omega\,I + \frac{1}{jC\omega}\,I = U \tag{4.28}$$

I et U étant l'intensité et la tension complexe respectivement. On déduit que :

$$\underbrace{\left(R + jL\omega \ + \frac{1}{jC\omega}\right)}_{Z} I = U \quad \Rightarrow \quad I = \frac{U}{Z} \tag{4.29}$$

Z étant l'impédance équivalent du circuit RLC. De la même manière, en utilisant les correspondances précédentes entres les grandeurs mécaniques et électrique on peut définir les impédances mécaniques α, $jm\omega$ et $\frac{k}{j\omega}$. En fonction de ces impédances on peut réécrire l'équation (4.24) en sachant que $i = \dot{q} \leftrightarrow \dot{x} = v$ comme suit :

$$\alpha\, v + jm\omega\, v + \frac{k}{j\omega}\, v = F \tag{4.30}$$

v étant la vitesse complexe et F la force complexe. Cette dernière équation peut être réécrite :

$$\underbrace{\left(\alpha + jm\omega + \frac{k}{j\omega}\right)}_{Z} v = F \quad \Rightarrow \quad v = \frac{F}{Z} \tag{4.31}$$

la grandeur $Z = \alpha + jm\omega + \frac{k}{j\omega}$ est dite impédance mécanique par comparaison avec l'impédance électrique. on note aussi que la résitance dans le circuit électrique joue le même role que l'amortisseur dans le système mécanique. Si on supprime la résitance du cricuit RLC on obtient un circuit LC et si on supprime l'amortisseur on obtient un système masse-ressort idéal. Si on plus on supprime le générateur de tension et la force d'e1xcitation on abouti aux équations différentielles suivantes :

$$L\,\ddot{q} + \frac{1}{C}\,q \quad = \quad 0 \tag{4.32}$$

$$m\,\ddot{x} + k\,x \quad = \quad 0 \tag{4.33}$$

Les deux équations sont identiques et elles correspondent à l'équation de l'oscillateur harmonique dont la solution est une fonction sinusoïdale. Ceci indique que la masse oscille jusqu'à l'infini et que le circuit LC est parcouru par un courant sinusoïdal jusqu'à l'infini signifiant que l'énergie électrique et l'énergie mécanique sont conservées. En introduisant la résistance et l'amortisseur on obtient les équations des systèmes amortis suivantes :

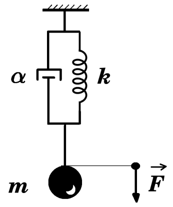
$$L\,\ddot{q} + R\,\dot{q} + \frac{1}{C}\,q \quad = \quad 0 \tag{4.34}$$

$$m\,\ddot{x} + \alpha\,\dot{x} + k\,x \quad = \quad 0 \tag{4.35}$$

trois solutions sont possibles pour ces équations selon le signe de $\lambda^2 - \omega_0^2$; mais ces solutions tendent toutes vers zéro avec le temps. Cela indique que la masse en mouvement doit s'arrêter avec le temps et que le courant dans dans le circuit tend vers zéro. On a une dissipation de l'énergie mécanique par frottement et une dissipation de l'énergie électrique par effet joule dans la résistance.

Exercices

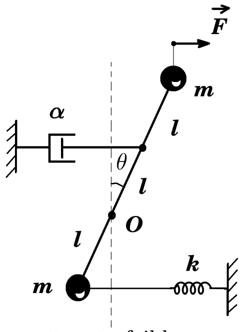
Exercice – 17



Dans le système ci-contre, une force sinusoïdale $\vec{F}$ force la masse m à osciller verticalement. Suivant l'axe vertical, la force $\vec{F}$ est donnée par $F = F_0 \cos \omega t$ par rapport à la position d'équilibre et le sens positif est choisi vers le bas. On modélise les frottements par un frottement visqueux de coefficient α.

1. Trouver l'équation du mouvement par le formalisme Lagrangien.
2. Trouver la solution permanente. Préciser son amplitude et sa phase.
3. Trouver la pulsation de résonance. Quelle est la valeur maximale que la masse ne doit pas dépasser pour éviter le phénomène de résonance. Calculer cette valeur pour $k = 4$ N/m et $\alpha = 4$ N.s/m

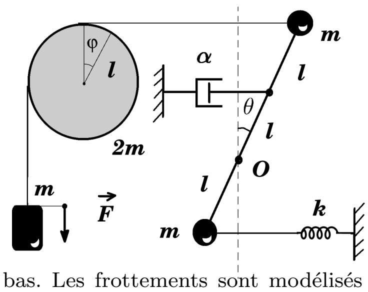
Exercice – 18



le système çi-contre est forcé à osciller autour de la verticale, qu i e st la position d'équilibre, par une force sinusoïdale $\vec{F}$ qui reste horizontale lors du mouvement. Elle est donnée par $F = F_0 \cos \omega t$ et le sens positif est choisi vers la droite. Les frottements sont modélisés par un frottement visqueux de coéfficient α. On suppose que l'amplitude du mouvement reste faible pour admettre l'approximation des faibles angles.

1. Exprimer et simplifier l'expression de l'énergie potentielle U.
2. Donner l'expression de l'énergie cinétique T du système.
3. Donner l'expression du Lagrangien du système et déduire l'équation du mouvement.
4. Donner la solution permanente. Préciser son amplitude et sa phase.

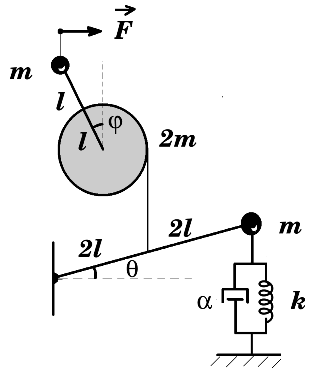
Exercice – 19



Le système précédent est modifié comme çi-contre. Il est forcé à osciller autour de la position d'équilibre, correspondant à $\theta = 0$, par une force sinusoïdale $\vec{F}$ verticale. Elle est donnée par $F = F_0 \cos \omega t$ et le sens positif est choisi vers le bas. Les frottements sont modélisés par un frottement visqueux de coéfficient α. On suppose que l'amplitude du mouvement reste faible pour admettre l'approximation des faibles angles.

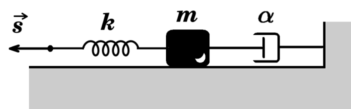
1. Exprimer et simplifier l'expression de l'énergie potentielle U.
2. Donner l'expression de l'énergie cinétique T du système.
3. Donner l'expression du Lagrangien du système et déduire l'équation du mouvement.

Exercice – 20



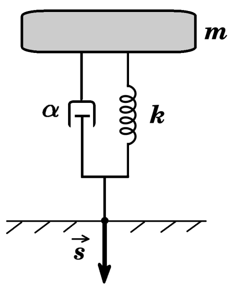
Soit le système çi-contre. Il est forcé à osciller autour de la position d'équilibre, correspondant à $\theta = 0$, par une force sinusoïdale $\vec{F}$ qui reste horizontale. Elle est donnée par $F = F_0 \cos \omega t$ et le sens positif est choisi vers la droite. Les frottements sont modélisés par un frottement visqueux de coéfficient α. On suppose que l'amplitude du mouvement reste faible pour admettre l'approximation des faibles angles. Trouver l'équation du mouvement en utilisant le formalisme Lagrangien.

Exercice – 21



Dans le système çi-contre, on impose un déplacement horizontal sinusoïdale au bout libre du ressort, tel que $s = s_0 \cos \omega t$ par rapport à la position d'équilibre (le sens positif est indiqué sur la figure vers la gauche). L'amortisseur donne un frottement visqueux de coéfficient α. Trouver l'équation différentielle du mouvement en utilisant le principe fondamental de la dynamique.

Exercice – 22



Dans le schéma çi-contre, on modélise l'isolation d'un système mécanique (la masse m dans notre cas) d'une source de vibrations (le sol). A l'instant $t = 0$, la masse est à l'équilibre le sol commence à vibrer avec un déplacement sinusoïdale vertical $s = s_0 \sin \omega t$ par rapport à la position d'équilibre (le sens positif est vers le bas) L'amortisseur donne un frottement visqueux de coéfficient α.

1. Trouver la déformation du ressort à l'équilibre avant le début des vibrations du sol.
2. Trouver l'équation différentielle du mouvement on utilisant le principe fondamental de la dynamique. Simplifier là en utilisant la condition d'équilibre.
3. Trouver la solution permanente. Préciser l'amplitude et la phase.
4. Quelle est la condition que le système doit satisfaire pour atténuer les vibrations du sol.

Solutions

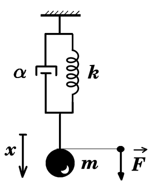
rappel :
En appliquant une force d'excitation au système, on doit ajouter au second membre de l'équation de Lagrange le terme de forme générale $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}.\vec{F}$. Cependant, cette forme se simplifie dans deux cas particuliers comme suit :

1. $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}.\vec{F} = \pm\frac{\partial x}{\partial q}.F$ lorsque la partie du système qui subit la force a un mouvement réctiligne de coordonnée x et la force reste parallèle à cet axe. On a le signe (+) lorsque la force et la coordonnée x ont le même sens positif et le signe (-) lorqu'ils sont opposés.
2. $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}.\vec{F} = \frac{\partial \phi}{\partial q}\mathcal{M}$ lorsque le point d'application de la force effectue un mouvement circulaire autour d'un axe (Δ) fixe suivant une coordonnée φ. $\mathcal{M}$ est le moment de la force par rapport à (Δ).

Solution de l'exercice 17

$\boxed{1}$ l'énergie potentielle en fonction de la coordonnée x définie à partir de la position d'équilibre s'écrit :

$$U = \frac{1}{2}k(x + x_0)^2 - mgx$$



aprés simplification en utilisant la condition d'équilibre, U devient :

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}kx_0^2$$

l'énergie cinétique étant $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$, le Lagrangien s'écrit :

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kx_0^2$$

l'équation de Lagrange est de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = -\beta\dot{q} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q}.\vec{F}$$

le second memebre de l'équation de Lagrange contient deux termes, un pour l'amortisseur :

$$-\beta\dot{q} = -\alpha\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2\dot{q} = -\alpha\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)^2\dot{x} = -\alpha\dot{x}$$

et un autre terme pour la force qui s'écrit dans ce cas particulier (notons que le sens positif de la force est celui de la coordonnée x) :

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}.\vec{F} = \frac{\partial x}{\partial x}.F = F = F_0\cos\omega t$$

et l'équation du mouvement s'écrit :

$$m\ddot{x} + kx = -\alpha\dot{x} + F_0\cos\omega t$$

qu'on peut réécrire comme :

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t}$$

$\boxed{2}$ On peut chercher la solution permanente de l'équation précédente sous la forme :

$$x_p(t) = a\cos(\omega t + \Phi)$$

en utilisant la notation complexe :

$$x_p(t) = a\cos(\omega t + \Phi) \quad\longleftrightarrow\quad X = A\,e^{j\omega t}$$
$$\frac{F_0}{m}\cos\omega t \quad\longleftrightarrow\quad \frac{F_0}{m}\,e^{j\omega t}$$

en remplaçant ces grandeurs complexes dans l'équation différentielle et en mettant $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ on obtient :

$$\left(\omega_0^2 - \omega_0^2 + j\frac{\omega\alpha}{m}\right)A = \frac{F_0}{m} \Rightarrow A = \frac{\frac{F_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\alpha}{m}}$$

le dénominateur est un nombre complexe qu'on peut écrire sous forme polaire :

$$\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\alpha}{m} = \left(\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega\alpha}{m}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} e^{j\varphi}$$

tel que :$\varphi = \arctan\frac{\frac{\omega\alpha}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2}$. Donc la solution X s'écrit :

$$X = \frac{\frac{F_0}{m}}{\left(\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega\alpha}{m}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}\, e^{j(\omega t - \varphi)}$$

la partie réelle de X est la solution permanente recherchée :

$$\boxed{x_p(t) = Re(X) = a\cos(\omega t - \varphi)\begin{cases} a = \dfrac{\frac{F_0}{m}}{\left(\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\left(\frac{\omega\alpha}{m}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \\ \varphi = \arctan\dfrac{\frac{\omega\alpha}{m}}{\omega_0^2-\omega^2}\end{cases}}$$

$\boxed{3}$ La pulsation de résonnance est la plusation ω_R qui permet d'obtenir une amplitude maximale. Elle correspond donc à la valeur pour laquelle la dérivée s'annule :

$$\frac{\partial a}{\partial \omega} = 0 \;\Rightarrow\; \left(\frac{F_0}{m}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{\left(2(\omega_0^2 - \omega^2)(-2\omega) + 2\omega\left(\frac{\alpha}{m}\right)^2\right)}{\left(\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega\alpha}{m}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

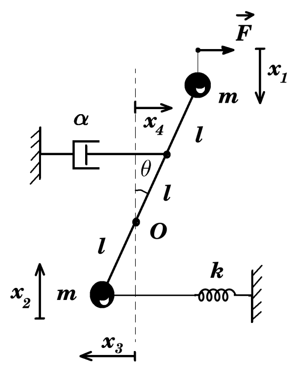
aprés simplification on obtient l'équation :

$$\omega_0^2 - \omega^2 = \frac{\alpha^2}{2m^2} \;\Rightarrow\; \boxed{\omega_R = \left(\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{2m^2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

si on ne veut pas avoir de résonnance, l'expression sous la racine doit être négative :

$$\frac{k}{m} - \frac{\alpha^2}{2m^2} < 0 \;\Rightarrow\; \boxed{m < \frac{\alpha^2}{2k}} \;\Rightarrow\; \boxed{m < 2\text{ kg}}$$

Solution de l'exercice 18



$\boxed{1}$ l'énergie potentielle du système en fonctions des coordonnées x_i définies à partir de la position d'équilibre :

$$U = \frac{1}{2}k(x_3 + x_0)^2 + mgx_2 - mgx_1$$

mais $x_1 \simeq l\theta^2$, $x_2 \simeq \frac{1}{2}l\theta^2$ et $x_3 \simeq -l\theta$ donc :

$$U = \frac{1}{2}k(x_0 - l\theta)^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2 - mgl\theta^2$$

donc :

$$U = \frac{1}{2}\left(kl - mg\right) l\theta^2 - klx_0\,\theta + \frac{1}{2}kx_0^2$$

A l'équilibre la dérivée de l'énergie potentielle s'annule $\dfrac{\partial U}{\partial \theta} = 0$, donc :

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \left(kl - mg\right) l\theta - klx_0 = 0$$

mais aussi $\theta = 0$, on obtient :

$$-\,klx_0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_0 = 0$$

ce qui permet de simplifier l'énergie potentielle :

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\left(kl - mg\right) l\theta^2}$$

$\boxed{2}$ l'énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{2}I\dot\theta^2 = \frac{1}{2}\left(ml^2 + m(2l)^2\right)\dot\theta^2 = \boxed{\frac{5}{2}ml^2\dot\theta^2}$$

$\boxed{3}$ Le Lagrangien :

$$L = T - U = \frac{5}{2}ml^2\dot\theta^2 - \frac{1}{2}\left(kl - mg\right) l\theta^2$$

L'équation de Lagrange d'un mouvement amorti s'écrit avec un second membre $-\beta\dot q$, dans notre cas $-\beta\dot\theta$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\beta\dot\theta \quad \text{avec} \quad \beta = \alpha\left(\frac{\partial x_4}{\partial \theta}\right)^2$$

mais $x_4 \simeq -l\theta \Rightarrow \frac{\partial x_4}{\partial \theta} \simeq -l$. La contribution du frottement dans le second membre de l'éqution de Lagrange devient $\boxed{-\beta\dot\theta = -\alpha l^2\dot\theta}$.

Le terme résultant de la force s'écrit[1] :

$$\frac{\partial \vec r}{\partial q}.\vec F = \frac{\partial \theta}{\partial \theta}\mathcal{M} = \mathcal{M} = -F.2l\cos\theta \simeq -F.2l = -2lF_0\cos\omega t$$

finalement on peut écrire l'équation de Lagrange :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 5ml^2\ddot\theta + \left(kl - mg\right) l\theta = -\alpha l^2\dot\theta - 2lF_0\cos\omega t$$

aprés réarrangement on obtient l'équation du mouvement :

$$\ddot\theta + \frac{\alpha}{5m}\dot\theta + \frac{(kl - mg)}{5ml}\,\theta = -\frac{2F_0}{5ml}\cos\omega t$$

$\boxed{4}$ On peut réécrire l'équation différentielle précédente sous la forme :

$$\ddot\theta + 2\lambda\dot\theta + \omega_0^2\,\theta = b\cos\omega t$$

tel que :

$$\lambda = \frac{\alpha}{10m} \qquad \omega_0^2 = \frac{(kl - mg)}{5ml} \qquad b = -\frac{2F_0}{5ml}$$

On peut chercher la solution permanente de l'équation précédente sous la forme :

$$x_p(t) = a\cos(\omega t + \Phi)$$

en utilisant la notation complexe :

$$\begin{aligned} x_p(t) = a\cos(\omega t + \Phi) \quad &\longleftrightarrow \quad X = A\,e^{j\omega t} \\ b\cos\omega t \quad &\longleftrightarrow \quad b\,e^{j\omega t} \end{aligned}$$

en remplaçant ces grandeurs complexes dans l'équation différentielle on obtient :

$$\left(\omega_0^2 - \omega_0^2 + j2\lambda\omega\right) A = b \Rightarrow A = \frac{b}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\lambda\omega}$$

le dénominateur est un nombre complexe qu'on peut écrire sous forme polaire :

$$\omega_0^2 - \omega^2 + j2\lambda\omega = \left(\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\lambda\omega)^2\right)^{\frac{1}{2}}\,e^{j\varphi}$$

tel que : $\varphi = \arctan\dfrac{2\lambda\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$. Donc la solution X s'écrit :

$$X = \frac{b}{\left(\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\lambda\omega)^2\right)^{\frac{1}{2}}}\,e^{j(\omega t - \varphi)}$$

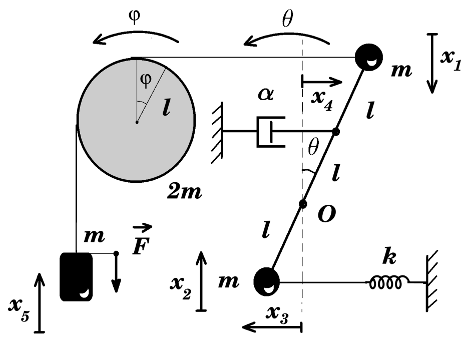
en remplaçant par l'expression de b :

$$\begin{aligned} X &= \frac{-\frac{2F_0}{5ml}}{\left(\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\lambda\omega)^2\right)^{\frac{1}{2}}}\,e^{j(\omega t - \varphi)} \\ &= \frac{\frac{2F_0}{5ml}}{\left(\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\lambda\omega)^2\right)^{\frac{1}{2}}}\,e^{j(\omega t + \pi - \varphi)} \end{aligned}$$

la partie réelle de X est la solution permanente recherchée :

$$\boxed{x_p(t) = Re(X) = a\cos(\omega t + \Phi) \begin{cases} a = \dfrac{\frac{2F_0}{5ml}}{\left(\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\lambda\omega)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \\ \Phi = \pi - \arctan\dfrac{2\lambda\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{cases}}$$

Solution de l'exercice 19



$\boxed{1}$ l'énergie potentielle du système en fonctions des coordonnées x_i définies à partir de la position d'équilibre :

$$U = \frac{1}{2}k(x_3 + x_0)^2 + mgx_2 - mgx_1 + mgx_5$$

mais $x_1 \simeq l\theta^2$, $x_2 \simeq \frac{1}{2}l\theta^2$, $x_3 \simeq -l\theta$ et $x_5 \simeq -2l\theta$ donc :

$$U = \frac{1}{2}k(x_0 - l\theta)^2 + \frac{1}{2}mgl\theta^2 - mgl\theta^2 - 2mgl\theta$$

donc :

$$U = \frac{1}{2}\left(kl - mg\right) l\theta^2 + \left(-kx_0 - 2mg\right) l\theta + \frac{1}{2}kx_0^2$$

A l'équilibre la dérivée de l'énergie potentielle s'annule $\dfrac{\partial U}{\partial \theta} = 0$, donc :

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = \left(kl - mg\right) l\theta + (-kx_0 - 2mg)l = 0$$

mais aussi $\theta = 0$, on obtient :

$$-\,kx_0 - 2mg = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_0 = -\frac{2mg}{k}$$

on remarque que x_0 est négatif indiquant que le ressort doit être comprimé pour que la tige soit verticale à l'équilibre. On peut simplifier l'expression de l'énergie potentielle :

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\left(kl - mg\right) l\theta^2 + \frac{1}{2}kx_0^2}$$

$\boxed{2}$ L'énergie cinétique :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}I_{barre}\dot\theta^2 + \frac{1}{2}I_{poulie}\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}m\dot x_5^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(ml^2 + m(2l)^2\right)\dot\theta^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\,2ml^2\right)\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}m\dot x_5^2 \\ &= \frac{5}{2}ml^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}m\dot x_5^2 \end{aligned}$$

[1]Rappelons que l'approximation pour les forces pour avoir un comportement harmonique est $\cos\theta \simeq 1$.

mais :

$$l\varphi = 2l\sin\theta \simeq 2l\theta \;\Rightarrow\; \varphi \simeq 2\theta \;\Rightarrow\; \dot{\varphi} \simeq 2\dot{\theta}$$
$$x_5 = -2l\sin\theta \simeq -2l\theta \;\Rightarrow\; \dot{x_5} \simeq -2l\dot{\theta}$$

donc :

$$T = \frac{5}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2(2\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m(-2l\dot{\theta})^2 = \boxed{\frac{13}{2}ml^2\dot{\theta}^2}$$

$\boxed{3}$ Le Lagrangien :

$$L = T - U = \frac{13}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(kl - mg)\,l\theta^2 - \frac{1}{2}kx_0^2$$

pour l'amortisseur, le second membre de l'équation de Lagrange :

$$-\beta\dot{\theta} = -\alpha\left(\frac{\partial x_4}{\partial\theta}\right)^2\dot{\theta} = \boxed{-\alpha l^2\dot{\theta}}$$

pour la force[2] en sachant que $x_5 \simeq -2l\theta \Rightarrow \frac{\partial x_5}{\partial\theta} \simeq -2l$:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial q}.\vec{F} = -\frac{\partial x_5}{\partial\theta}F = F.2l = \boxed{2lF_0\cos\omega t}$$

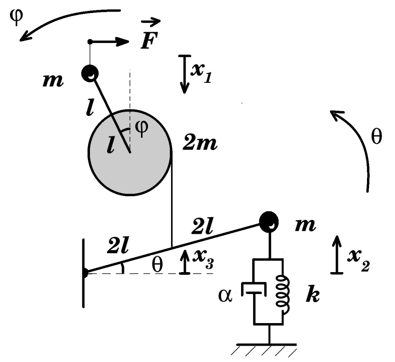
finalement on peut écrire l'équation de Lagrange :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 13ml^2\ddot{\theta} + (kl - mg)\,l\theta = -\alpha l^2\dot{\theta} + 2lF_0\cos\omega t$$

aprés réarrangement on obtient l'équation du mouvement :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{13m}\dot{\theta} + \frac{(kl - mg)}{13ml}\theta = \frac{2F_0}{13ml}\cos\omega t}$$

Solution de l'exercice 20



l'énergie potentielle du système en fonction des axes définis à partir de la position déquilibre :

$$U = \frac{1}{2}k(x_2 + x_0)^2 - mgx_1 + mgx_2$$

mais les trois coordonnées x_1, x_2 et x_3 dépendent de θ comme suit (en sachant que $2l\sin\theta = l\varphi \Rightarrow \varphi = 2\theta$) :

$$\begin{aligned} x_1 &\simeq l\varphi^2 = l(2\theta)^2 = 4l\theta^2 \\ x_2 &\simeq 4l\theta \\ x_3 &\simeq l\theta \end{aligned}$$

En remplaçant l'expression de ces coordonnées dans U on obtient :

$$U = (8kl - 4mg)\,l\theta^2 + (4kx_0 + 4mg)\,l\theta + \frac{1}{2}kx_0^2$$

A l'équilibre la dérivée de l'énergie potentielle s'annule $\frac{\partial U}{\partial\theta} = 0$, donc :

$$\frac{\partial U}{\partial\theta} = 2\,(8kl - 4mg)\,l\theta + (4kx_0 + 4mg)l = 0$$

mais aussi $\theta = 0$, on obtient :

$$4kx_0 + 4mg = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_0 = -\frac{mg}{k}$$

On peut simplifier l'expression de l'énergie potentielle :

$$\boxed{U = (8kl - 4mg)\,l\theta^2 + \frac{1}{2}kx_0^2}$$

L'énergie cinétique (en sachant que $\varphi = 2\theta \Rightarrow \dot{\varphi} = 2\dot{\theta}$) :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}I_{barre}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_{poulie}\dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(m(4l)^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}2ml^2 + m(2l)^2\right)(2\dot{\theta})^2 \\ &= \boxed{18\,ml^2\dot{\theta}^2} \end{aligned}$$

Le Lagrangien :

$$L = T - U = 18\,ml^2\dot{\theta}^2 - (8kl - 4mg)\,l\theta^2 - \frac{1}{2}kx_0^2$$

pour l'amortisseur, le second membre de l'équation de Lagrange :

$$-\beta\dot{\theta} = -\alpha\left(\frac{\partial x_3}{\partial\theta}\right)^2\dot{\theta} = \boxed{-\alpha l^2\dot{\theta}}$$

pour la force :

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial q}.\vec{F} = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\mathcal{M} = -2.F.2l = \boxed{-4lF_0\cos\omega t}$$

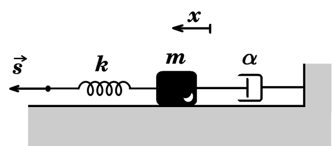
finalement on peut écrire l'équation de Lagrange :

$$36ml^2\ddot{\theta} + (16kl - 8mg)\,l\theta = -4\alpha l^2\dot{\theta} - 4lF_0\cos\omega t$$

aprés réarrangement on obtient l'équation du mouvement :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{9m}\dot{\theta} + \frac{(4kl - 2mg)}{9ml}\theta = -\frac{F_0}{9ml}\cos\omega t}$$

Solution de l'exercice 21



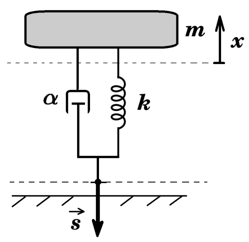
A l'équilibre le ressort n'est pas déformé. Lorsque le bout du ressort est soumis au déplacement $s = s_0\sin\omega t$ le ressort se déforme et la masse s'écarte de la position d'équilibre suivant la coordonnée x dont l'origine est définie à partir de cette position d'équilibre. La déformation du ressort est alors $s - x$ ce qui produit une force de tension sur la masse $k(s - x)$. L'amortisseur produit une force de frottement $-\alpha\dot{x}$. Le bilan des forces suivant Le principe de la dynamique appliqué à la masse suivant l'axe horizontal s'écrit :

$$m\ddot{x} = k(s - x) - \alpha\dot{x}$$

aprés réarrangement on obtient l'équation du mouvement :

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m} = \frac{k}{m}s_0\sin\omega t}$$

Solution de l'exercice 22



[2]Remarquant que les sens positifs de la force et de la coordonnée x_5 sont opposés l'un à l'autre.

1 L'énergie potentielle du système s'écrit :

$$U = \frac{1}{2}k(s + x + x_0)^2 + mgx$$

A l'équilibre la dérivée de l'énergie potentielle s'annule $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$, donc :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = k(s + x + x_0) + mg = 0$$

mais aussi, à l'équilibre, le sol est au repos donc $s = 0$ et $x = 0$, on obtient :

$$\boxed{kx_0 + mg = 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_0 = -\frac{mg}{k}}$$

2 Les forces qui agissent sur le système sont le poid, la tension du ressort et la force de frottement qui dépend de la vitesse relative entre le piston et la chemise de l'amortisseur. Le bilan suivant le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m\ddot{x} = -mg - k(s + x + x_0) - \alpha(\dot{x} + \dot{s})$$

aprés réarrangement :

$$m\ddot{x} = -\underbrace{(mg + kx_0)}_{=0} - k(s + x) - \alpha(\dot{x} + \dot{s})$$

donc l'équation différentielle du mouvement devient :

$$m\ddot{x} = -k(s + x) - \alpha(\dot{x} + \dot{s})$$

3 L'équation précédente peut être simplifiée comme suit (noter qu'on utilise la notation complexe) :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx &= -ks_0 \sin \omega t - \alpha\omega s_0 \cos \omega t \\ &= ks_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) - \alpha\omega s_0 \cos \omega t \\ &= Re\left(ks_0\, e^{j\frac{\pi}{2}}\, e^{j\omega t} - \alpha\omega s_0 e^{j\omega t}\right) \\ &= Re\left((jk - \alpha\omega)\, s_0 e^{j\omega t}\right) \end{aligned}$$

le nombre complexe $jk - \alpha\omega$ peut être écrit sous forme polaire $jk - \alpha\omega = \left(k^2 + (\alpha\omega)^2\right)^{\frac{1}{2}} e^{j\varphi}$ tel que $\varphi = \arctan -\frac{k}{\alpha\omega}$. donc :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx &= Re\left(\left(k^2 + (\alpha\omega)^2\right)^{\frac{1}{2}} e^{j\varphi}\ s_0 e^{j\omega t}\right) \\ &= Re\left(s_0 \left(k^2 + (\alpha\omega)^2\right)^{\frac{1}{2}}\ e^{j(\omega t + \varphi)}\right) \\ &= s_0 \left(k^2 + (\alpha\omega)^2\right)^{\frac{1}{2}}\ \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

qu'on peut écrire sous la forme :

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{s_0 \left(k^2 + (\alpha\omega)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{m}\ \cos(\omega t + \varphi)$$

en mettant $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$ cette équation devient :

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x &= \frac{s_0 \left(k^2 + (\alpha\omega)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{m}\ \cos(\omega t + \varphi) \\ &= s_0 \left(\left(\frac{k}{m}\right)^2 + \left(\frac{\alpha\omega}{m}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\ \cos(\omega t + \varphi) \\ &= s_0 \left(\left(\omega_0^2\right)^2 + (2\lambda\omega)^2\right)^{\frac{1}{2}}\ \cos(\omega t + \varphi) \\ &= s_0 \left(\omega_0^4 + 4\lambda^2\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}\ \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

On peut chercher la solution permanente de l'équation précédente sous la forme :

$$x_p(t) = a\cos(\omega t + \Phi)$$

en utilisant la notation complexe :

$$\begin{aligned} x_p(t) = a\cos(\omega t + \Phi) &\longleftrightarrow X = A\, e^{j\omega t} \\ s_0 \left(\omega_0^4 + 4\lambda^2\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}\ \cos(\omega t + \varphi) &\longleftrightarrow s_0 \left(\omega_0^4 + 4\lambda^2\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}\ e^{j\varphi}\, e^{j\omega t} \end{aligned}$$

en remplaçant dans l'équation différentielle on obtient :

$$A = \frac{s_0 \left(\omega_0^4 + 4\lambda^2\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}\ e^{j\varphi}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\lambda\omega}$$

le nombre complexe dans le dénominateur peut s'écrire sous forme polaire $\omega_0^2 - \omega^2 + j2\lambda\omega = \left(\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}\ e^{j\delta}$ tel que $\delta = \arctan \frac{2\lambda\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ ce qui donne :

$$\begin{aligned} A &= \frac{s_0 \left(\omega_0^4 + 4\lambda^2\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}\ e^{j\varphi}}{\left(\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}\ e^{j\delta}} \\ &= s_0 \frac{\left(\omega_0^4 + 4\lambda^2\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}}\ e^{j(\varphi - \delta)} \end{aligned}$$

donc :

$$X = A\, e^{j\omega t} = s_0 \frac{\left(\omega_0^4 + 4\lambda^2\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}}\ e^{j(\omega t + \varphi - \delta)}$$

la solution permanente est alors :

$$\boxed{x_p(t) = a\cos(\omega t + \phi) \begin{cases} a = s_0 \frac{\left(\omega_0^4 + 4\lambda^2\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}} \\ \phi = \varphi - \delta = -\arctan \frac{k}{\alpha\omega} - \arctan \frac{2\lambda\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{cases}}$$

3 Pour atténuer les vibrations du sol dont l'amplitude est s_0 il faut que l'amplitude a soit inférieur à s_0. Donc :

$$\begin{aligned} \frac{a}{s_0} < 1 \quad &\Rightarrow \quad \frac{\left(\omega_0^4 + 4\lambda^2\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2\right)^{\frac{1}{2}}} < 1 \\ &\Rightarrow \quad \frac{\omega_0^4 + 4\lambda^2\omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2} < 1 \\ &\Rightarrow \quad \omega_0^4 + 4\lambda^2\omega^2 < \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\lambda^2\omega^2 \\ &\Rightarrow \quad \omega_0^4 < \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 \\ &\Rightarrow \quad 2\omega_0^2\omega^2 < \omega^4 \\ &\Rightarrow \quad \boxed{\omega > \sqrt{2}\,\omega_0} \end{aligned}$$

donc si la fréquence des vibrations du sol est supérieure à la fréquence naturelle du système par un facteur de racine de deux on aura atténuation. Au contraire, si la fréquence des vibrations du sol est inférieure à la valeur précédente on aura une amplification des vibrations. On a interet à diminuer le plus possible la fréquence naturelle du système mécanique qu'on veut isolé.

Bibliographie

[1] James E. Ackroyd. *Pearson Physics.* Pearson eduction, Canada.

[2] H. Djelouah. *Vibrations et Ondes Mécaniques.* Faculté de Physique, USTHB, Algérie.

[3] A. P. French. *Vibrations and Waves - The M.I.T introductory Physics Series.* W. W. Norton and Compagny, New York.

[4] F. Hammad. http ://exerev.yolasite.com - http ://sites.google.com/site/exerev.

[5] George C. King. *Vibrations and Waves - The Manchester Physics Series.* John Wiley and Sons, United Kingdom.

[6] Walter Lewin. *Vibrations and Waves - M.I.T OpenCourseWare.* USA.

[7] Serway and jewett. *Physics for Scientists and Engineers.* 6th edition.